

# Министерство образования и науки Российской Федерации

УДК  
ГРНТИ  
Инв. №

## УТВЕРЖДЕНО:

Исполнитель:

Государственное учебно-научное учреждение  
Факультет вычислительной математики и  
кибернетики Московского государственного  
университета имени М.В.Ломоносова

От имени Руководителя организации

\_\_\_\_\_ / Моисеев Е.И. /  
М.П.

# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ

о выполнении 2 этапа Государственного контракта  
№ 14.740.11.0996 от 23 мая 2011 г.

Исполнитель: Государственное учебно-научное учреждение Факультет  
вычислительной математики и кибернетики Московского государственного  
университета имени М.В.Ломоносова

Программа (мероприятие): Федеральная целевая программа «Научные и научно-  
педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., в рамках реализации  
мероприятия № 1.2.2 Проведение научных исследований научными группами под  
руководством кандидатов наук.

Проект: Математические методы анализа и обработки стохастических изображений.

Руководитель проекта:

\_\_\_\_\_ /Шестаков Олег Владимирович  
(подпись)

Москва  
2012 г.

**СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ**  
по Государственному контракту 14.740.11.0996 от 23 мая 2011 на выполнение  
поисковых научно-исследовательских работ для государственных нужд

Организация-Исполнитель: Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Руководитель темы:

кандидат физико-математических наук, доцент \_\_\_\_\_ Шестаков О. В.  
подпись, дата

Исполнители темы:

кандидат физико-математических наук, без ученого звания \_\_\_\_\_ Мизотин М. М.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Насонов А. В.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Черноморец А. А.  
подпись, дата

кандидат физико-математических наук, без ученого звания \_\_\_\_\_ Кудрявцев А. А.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Садовой И. А.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Кузнецова М. Г.  
подпись, дата

без ученой степени, без ученого звания \_\_\_\_\_ Ситдииков И.Т.  
подпись, дата

## Реферат

Отчет 75 с., 1 ч., 14 рис., 1 табл., 44 источн., 0 прил.

стохастические изображения, радиолокационные изображения, томографические изображения, обращение преобразования Радона, регуляризирующие методы

В отчете представлены результаты исследований, выполненных по 2 этапу Государственного контракта № 14.740.11.0996 "Математические методы анализа и обработки стохастических изображений." (шифр "2011-1.2.2-111-001") от 23 мая 2011 по направлению "Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук в следующих областях:- математика;- механика" в рамках мероприятия 1.2.2 "Проведение научных исследований научными группами под руководством кандидатов наук.", мероприятия 1.2 "Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук и кандидатов наук", направления 1 "Стимулирование закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий." федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы.

Цель работы - Создание методов восстановления вероятностных характеристик стохастических сигналов, таких как изображения радиолокатора с синтезированной апертурой, опто-акустических томографических изображений и получение оценок погрешности полученного решения; разработка метода регуляризации для реконструкции по конечному числу проекций при наличии шума. Также, применение устойчивых методов для определения поверхностного натяжения жидкости методом лежащей капли.

При выполнении работ по второму этапу государственного контракта для решения поставленных задач были применены методы фурье-синтеза, интерполяции многочленами, методы регуляризации, вариационные методы, а также различные методы математической статистики для построения оценок параметров.

Для проведения вычислительных экспериментов на втором была задействована вычислительная и программная база кафедры математической статистики и лаборатории математических методов обработки изображений факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

На втором этапе работ получены следующие результаты:

1. Методы восстановления вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам сферических преобразований

Радона.

2. Метод регуляризации для реконструкции и оценки погрешностей при наличии шума.

3. Устойчивый метод определения поверхностного натяжения жидкости методом лежащей капли.

## СОДЕРЖАНИЕ

Проведение II этапа исследований по проблеме «Математические методы анализа и обработки стохастических изображений» .....	8
1. Создание и теоретическое обоснование метода восстановления вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам сферических преобразований Радона.....	8
2. Разработка устойчивого метода реконструкции стохастических радиолокационных, термо- и опто-акустических томографических изображений .....	35
3. Разработка устойчивого метода расчета поверхностного натяжения по профилю лежащей капли .....	48
4. Заключение .....	70
Список использованных источников .....	72

## Введение

Методы анализа и обработки стохастических сигналов и изображений представляют собой интенсивно развивающуюся область прикладной математики. Это направление является крайне наукоемким, при решении задач такого класса используются методы различных наук, таких как математика, информатика, физика и радиотехника. Примерами этого служит использование методов анализа и обработки стохастических сигналов и изображений при анализе радиолокационных изображений и восстановлении стохастических термо- и опто-акустических изображений.

Среди наиболее востребованных применений методов обработки стохастических сигналов можно выделить задачу восстановления вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам сферических преобразований Радона, которая возникает в радиолокационных, томографических и других приложениях. Функцию, описывающую изображение изучаемого объекта, необходимо считать случайной, поскольку состояния (реализации) функции меняются случайным образом во время процесса получения проекций. Это приводит к тому, что восстановление даже одной реализации случайной функции обычными томографическими методами невозможно. Основным интерес в такого рода задачах представляют собой вероятностные характеристики функции.

Также следует отметить, что в задачах реконструкции термо- и опто-акустических томографических изображений, в связи с практической возможностью получать лишь конечное число проекций, задача становится некорректно поставленной. Для решения проблемы неустойчивости необходимо использовать аппарат методов регуляризации.

Применение методов регуляризации позволяет получать пусть и приближенное, но устойчивое решение, что гораздо важнее в практическом смысле. Важной особенностью стохастических методов является то, что при этом можно получить оценку погрешности результата восстановления.

Аналогичная проблема возникает в задаче определения поверхностного натяжения капли по фотографии профиля, где также производится регуляризация решения. Фактически, восстановление сигнала производится на 2 этапах: сначала при восстановлении контура капли по зашумленному изображению, а затем при решении обратной задачи восстановления натяжения по экспериментально определенному профилю, который также подвержен случайным ошибкам вследствие дискретизации и несовершенства методов выделения контуров. Переформулирование задачи в виде минимизации функционала ошибки позволяет обойти неустойчивость, связанную с дифференцированием зашумленного изображения, а также с самой зависимостью формы капли от поверхностного натяжения.

Одним из главных достоинств применения стохастического подхода в различных задачах является возможность получить наряду с решением оценку погрешности, что повышает его практическую ценность.

**Проведение II этапа исследований по проблеме  
«Математические методы анализа и обработки стохастических  
изображений»**

**1. Создание и теоретическое обоснование метода  
восстановления вероятностных характеристик случайных  
функций по вероятностным характеристикам сферических  
преобразований Радона**

*1.1 Сферическое преобразование Радона*

Сферическое преобразование Радона возникает в различных приложениях, включая термоакустическую томографию, оптоакустическую томографию, обработку сигналов, получаемых радарами и сонарами, и т. п. Оно также используется в различных областях теории аппроксимации и математической физики (см. [1-4], [9-14], [16], [17], [21] и [22]).

Пусть  $f(x, y)$  - непрерывная функция с компактным носителем. Далее, не ограничивая общности, будем считать что носителем функции  $f(x, y)$  является круг  $U$  единичного радиуса с центром в начале координат. Определим сферическое преобразование Радона на плоскости следующим образом:

$$Rf(p, r) = \int_{S(p, r)} f(x, y) ds. \quad (1.1.1)$$

Здесь  $p \in \mathbf{R}^2$ ,  $r \in (0, \infty)$ ,  $S(p, r)$  - окружность с центром в точке  $p$  и радиусом  $r$ , а  $ds$  - мера на  $S(p, r)$ . В данном параграфе мы будем рассматривать важный для приложений (в частности, томографических) случай, когда центры окружностей  $S(p, r)$  располагаются на границе носителя  $f(x, y)$ , т. е.  $p = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . По аналогии с классическим преобразованием Радона будем называть интегральные преобразования вида (1.1.1) сферическими проекциями. Т. е. сферическая



проекция представляет собой функцию от  $r \in (0, \infty)$  при фиксированном  $p$  (или в нашем случае  $\theta$ . Такие сферические проекции будем обозначать через  $Rf(\theta, r)$ ).

В ряде томографических приложений функцию  $f(x, y)$ , описывающую изображение изучаемого объекта, необходимо считать случайной. При этом основной особенностью является то обстоятельство, что состояния (реализации) функции, меняются случайным образом во время процесса получения проекций. Это приводит к тому, что восстановление даже одной реализации случайной функции обычными томографическими методами невозможно. Основным интерес в такого рода задачах представляют собой вероятностные характеристики функции  $f(x, y)$  [5-7].

В данном параграфе для класса случайных функций, имеющих не более чем счетное число состояний, разрабатывается метод восстановления распределений случайной функции по распределениям ее сферических проекций.

Формальная постановка рассматриваемой задачи следующая. Имеется двумерная случайная функция  $\xi(x, y)$  - стохастический объект вида  $\xi(x, y) = f_\nu(x, y)$ , где  $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots$  - последовательность интегрируемых функций, определенных в единичном круге  $U$ , а  $\nu$  - случайная величина, принимающая целые положительные значения. Вероятностная структура  $\xi(x, y)$  полностью определяется набором

$$(f_1(x, y), f_2(x, y), \dots; p_1, p_2, \dots),$$

где  $p_i = P(\xi(x, y) = f_i(x, y))$ ,  $i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ . Распределение  $\xi(x, y)$

будем обозначать через  $P_\xi$ , а распределения сферических проекций (при фиксированном  $\theta \in [0, 2\pi)$ ) через  $P_{\xi(\theta)}$ . Требуется по распределениям  $P_{\xi(\theta)}$  для  $\theta \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  - некоторое подмножество  $[0, 2\pi)$ , определить распределение  $P_\xi$ .

Проблема описания множества точек  $p$ , для которого задача обращения преобразования (1.1.1) имеет единственное решение, рассматривалась многими авторами. В частности, справедлива следующая теорема [4].

**Теорема 1.1.** Пусть  $P$  множество всех точек  $p$ , для которых известны сферические проекции вида (1). Функцию  $f(x, y)$  с компактным носителем невозможно восстановить единственным образом по преобразованиям  $Rf(p, r)$ ,  $p \in P$ ,  $r \in (0, \infty)$  тогда и только тогда, когда

$$P \subset M(\Sigma_N) \cup \Phi.$$

Здесь  $M$  - оператор движения (перемещения и/или поворота),  $\Phi$  - конечное множество, а  $\Sigma_N$  - система прямых Коксетера, определяемая следующим образом: для любого натурального  $N$  система  $\Sigma_N$  состоит из прямых  $L_k$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ), проходящих через начало координат под углом  $\pi k/N$  к оси  $OX$ . Кроме того, справедлива еще одна теорема единственности.

**Теорема 1.2.** Пусть  $D$  - ограниченное открытое множество в  $\mathbf{R}^2$  с гладкой границей  $\partial D$ , и пусть  $\bar{D}$  (замыкание множества  $D$ ) представляет собой строго выпуклое множество. Обозначим через  $\Lambda$  любое открытое подмножество  $\partial D$ . Если носитель гладкой функции  $f(x, y)$  содержится в  $\bar{D}$ , и  $Rf(p, r) = 0$  для всех  $p \in \Lambda$  и всех  $r$ , тогда  $f(x, y) \equiv 0$ .

Из этих теорем следует, что в рамках нашей модели функцию  $f(x, y)$  можно однозначно восстановить по значениям сферических проекций  $Rf(\theta, r)$ , заданным при  $\theta \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  - любое подмножество  $[0, 2\pi)$ , имеющее положительную меру Лебега.

Используя этот факт, мы покажем, что распределение двумерной случайной функции полностью определяется распределениями проекций, а именно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.3.** Пусть случайные функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  имеют описанный выше вид, и

$$P_{\xi(\theta)} = P_{\eta(\theta)}$$

для всех  $\theta \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  - любое подмножество  $[0, 2\pi)$  положительной меры, тогда

$$P_{\xi} = P_{\eta}.$$

Доказательство. Предположим, что  $P_{\xi} \neq P_{\eta}$ . Это означает, что существует функция  $f(x, y)$  с носителем в круге  $U$  такая, что

$$P(\xi(x, y) = f(x, y)) \neq P(\eta(x, y) = f(x, y)).$$

Обозначим через  $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots$  значения случайной функции  $\xi(x, y)$ , отличные от  $f(x, y)$ , и через  $g_1(x, y), g_2(x, y), \dots$  обозначим аналогичные значения  $\eta(x, y)$  (таким образом,  $f(x, y) \neq f_i(x, y)$  и  $f(x, y) \neq g_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ). Для каждого фиксированного  $i = 1, 2, \dots$  пусть  $A_i$  обозначает множество всех  $\theta \in \Lambda$ , для которых

$$Rf(\theta, r) \equiv Rf_i(\theta, r)$$

и, соответственно,  $B_i$  - множество всех  $\theta \in \Lambda$ , для которых

$$Rf(\theta, r) \equiv Rg_i(\theta, r).$$

Каждое из множеств  $A_i$  и  $B_i$  имеет меру нуль. Если для некоторого  $i$  это было бы не так, то  $Rf(\theta, r)$  совпадала бы с  $Rf_i(\theta, r)$  или с  $Rg_i(\theta, r)$  на множестве положительной меры, и в силу приведенных выше утверждений это влекло бы за собой совпадение функции  $f(x, y)$  с функцией  $f_i(x, y)$  или с функцией  $g_i(x, y)$ .

Таким образом, множество

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i)$$

имеет меру нуль, следовательно, множество  $\Lambda \setminus C$  непусто. Возьмем произвольное  $\theta \in \Lambda \setminus C$ . Поскольку для этого  $\theta$  выполнено  $Rf(\theta, r) \neq Rf_i(\theta, r), i = 1, 2, \dots$ , следовательно

$$P(R\xi(\theta, r) = Rf(\theta, r)) = P(\xi(x, y) = f(x, y)),$$

и аналогично

$$P(R\eta(\theta, r) = Rf(\theta, r)) = P(\eta(x, y) = f(x, y)).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Как следует из доказанной теоремы, в рамках описанной модели возможно восстановить распределение двумерной случайной функции, зная распределения ее сферических проекций на множестве  $\Lambda$ , имеющем положительную меру. В этом пункте будет предложен метод, позволяющий разделить множество зарегистрированных сферических проекций на группы, соответствующие различным состояниям случайной функции. Для удобства будем полагать, что  $\Lambda$  совпадает с  $[0, 2\pi)$ .

Для простоты изложения мы будем рассматривать класс функций, имеющих всего два состояния. Обобщение на любое конечное число состояний очевидно, а для случая счетного числа состояний можно произвести процедуру «усечения» распределений сферических проекций.

Итак, пусть случайная функция  $\xi(x, y)$  принимает значения  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ . Предполагается, что известны распределения сферических проекций для всех  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Т. е. для каждого  $\theta \in [0, 2\pi)$  известны функции  $Rf_i(\theta, r), i = 1, 2$ , являющиеся проекциями функций  $f_i(x, y), i = 1, 2$ , и реализующиеся с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ , соответственно. Причем, вообще говоря, заранее неизвестно, какое состояние проекции соответствует какому состоянию функции, т. е. может быть так, что  $Rf_1(\theta, r)$  является проекцией  $f_2(x, y)$ , а  $Rf_2(\theta, r)$  - проекцией  $f_1(x, y)$ . Необходимо разделить функции  $Rf_i(\theta, r), i = 1, 2$ , для всех  $\theta \in [0, 2\pi)$  на группы так, чтобы каждая группа состояний проекций относилась к одному состоянию случайной функции.

Если  $p_1 \neq p_2$ , тогда такое разделение можно произвести по вероятностям состояний сферических проекций, т. е. для всех  $\theta \in [0, 2\pi)$  то значение  $Rf_i(\theta, r)$ , которое реализуется с вероятностью  $p_1$ , мы относим к

первой группе, а значение  $Rf_i(\theta, r)$ , которое реализуется с вероятностью  $p_2$ , ко второй.

В случае, когда  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ , метод группировки основан на использовании некоторых свойств сферических проекций.

**Лемма. 1.1.** Пусть  $Rf(\theta, r)$  - сферическая проекция функции  $f(x, y)$ , имеющей носитель в круге  $U$ , тогда интеграл

$$J^{(k)}(\theta) = \int_0^{\infty} r^{2k} Rf(\theta, r) dr, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.1.2)$$

который мы назовем  $2k$ -м моментом сферической проекции  $Rf(\theta, r)$ , представляет собой тригонометрический многочлен от  $\theta$  степени не выше чем  $k$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r^{2k} Rf(\theta, r) dr &= \int_0^{\infty} r^{2k} \int_0^{2\pi} f(\cos\theta + r\cos\varphi, \sin\theta + r\sin\varphi) r d\varphi dr = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2)^k f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta + 1)^k f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Указанные интегралы существуют, так как функция  $f(x, y)$  имеет носитель в круге  $U$ . Последний интеграл, очевидно, представляет собой тригонометрический многочлен от  $\cos\theta$  и  $\sin\theta$  степени не выше чем  $k$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Нетрудно убедиться, что при данном  $\theta \in [0, 2\pi)$

$$Rf(\theta, r) \equiv 0$$

при  $r \in (0, \infty)$  тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\infty} r^{2k} Rf(\theta, r) dr = 0$$

для всех  $k = 0, 1, \dots$  (интеграл на самом деле имеет конечные пределы по  $r \in (0, 2)$  в силу того, что функция  $f(x, y)$  имеет носитель в круге  $U$ ). Действительно, условие  $Rf(\theta, r) \equiv 0$  эквивалентно тому, что

$$\int_0^{\infty} g(r^2) Rf(\theta, r) dr = 0$$

для любой непрерывной функции  $g(r)$ , имеющей компактный носитель. В свою очередь любую такую функцию можно равномерно приблизить многочленом.

Используя приведенные свойства сферических проекций, можно построить метод группировки.

Сначала берем интегралы от  $Rf_i(\theta, r), i = 1, 2$ , по  $r$  для некоторого  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Если эти интегралы отличны друг от друга, то поскольку их значения не зависят от  $\theta$  (они представляют собой тригонометрические многочлены нулевой степени, т. е. константы), можно произвести группировку, основываясь на этих значениях. Для этого, для каждого  $\theta \in [0, 2\pi)$  беря интегралы по  $r$  от  $Rf_i(\theta, r), i = 1, 2$ , мы относим сферическую проекцию  $Rf_i(\theta, r)$  к той или иной группе, в зависимости от того, чему равен интеграл от нее по  $r$ . В результате в каждой группе окажутся сферические проекции  $Rf_i(\theta, r), \theta \in [0, 2\pi)$ , интегралы от которых по  $r$  равны одному и тому же значению.

В случае, когда интегралы от  $Rf_i(\theta, r), i = 1, 2$ , по  $r$  совпадают, мы рассматриваем моменты  $J_i^{(k)}(\theta)$ . В силу сделанного выше замечания, если все моменты  $J_i^{(k)}(\theta)$  двух функций совпадают между собой, то эти функции эквивалентны. Значит, если функции  $Rf_i(\theta, r), i = 1, 2$ , различны, то найдется номер  $m$ , для которого моменты сферических проекций,  $J_i^{(m)}(\theta), i = 1, 2$ , различаются. Последовательно перебирая моменты, мы дойдем до этого номера. Поскольку моменты являются тригонометрическими многочленами от  $\theta$ , значит, они либо тождественно равны либо пересекаются в конечном

числе точек. Пусть  $\delta$  задано так, что найдется точка  $\theta$ , в окрестности которой разница между функциями  $m$ -х моментов сферических проекций  $Rf_i(\theta, r), i = 1, 2$ , по модулю больше  $\delta$  (т. е. в этой окрестности одна функция момента больше другой больше чем на  $\delta$ ). Посчитав значения  $J_i^{(m)}(\theta_j), i = 1, 2$ , в  $2m + 1$  близких точках  $\theta_j$  из этой окрестности, мы можем разделить эти значения на группы, соответствующие каждому состоянию случайной функции (если разности  $J_1^{(m)}(\theta_j) - J_2^{(m)}(\theta_j)$  и  $J_1^{(m)}(\theta_{j+1}) - J_2^{(m)}(\theta_{j+1})$  имеют разный знак, значит значения  $J_1^{(m)}(\theta_j)$  и  $J_1^{(m)}(\theta_{j+1})$  соответствуют различным состояниям случайной функции, и следует поменять местами  $Rf_1(\theta_{j+1}, r)$  и  $Rf_2(\theta_{j+1}, r)$ ), а затем найти явный вид функций моментов сферических проекций  $J_i^{(m)}(\theta), i = 1, 2$ , от переменной  $\theta$ . Для этого нужно решить следующие две линейные системы уравнений:

$$a_{m,0}^i + \sum_{n=1}^m a_{m,n}^i \cos(n\theta_j) + \sum_{n=1}^m b_{m,n}^i \sin(n\theta_j) = J_i^{(m)}(\theta_j),$$

$$j = 0 \dots 2m, i = 1, 2, \quad (1.1.3)$$

и найти коэффициенты  $a_{m,n}^i$  и  $b_{m,n}^i$  тригонометрических многочленов, которыми представляются функции  $J_i^{(m)}(\theta)$ .

Вывод явного вида функций  $J_i^{(m)}(\theta)$  аналогичен выводу интерполяционного многочлена Лагранжа. Решая (1.1.3), имеем

$$J_i^{(m)}(\theta) = \sum_{j=0}^{2m} J_i^{(m)}(\theta_j) \prod_{k=0, k \neq j}^{2m} \frac{\sin(\frac{\theta - \theta_k}{2})}{\sin(\frac{\theta_j - \theta_k}{2})}, i = 1, 2. \quad (1.1.4)$$

Далее, вычисляя для каждого  $\theta$  значение  $J_i^{(m)}(\theta)$  по формуле (1.1.2), мы относим сферические проекции к той или иной группе, в зависимости то того, со значением какой из найденных функций (4) в точке  $\theta$  совпадает это вычисленное значение.

После того, как сферические проекции распределены по группам, можно восстановить каждое состояние случайной функции, а значит и ее распределение, с помощью обычных формул обращения.

На практике мы имеем дело с конечным набором сферических проекций для  $\theta_1, \dots, \theta_N$ . Причем, как правило, проекции задаются не точно, а с некоторой погрешностью. Погрешности возникают вследствие несовершенства оборудования, регистрирующего проекции, случайных помех при измерении, ошибок интерполяции и других причин.

Предположим, что сферические проекции каждого состояния случайной функции  $\xi(x, y)$  заданы с погрешностью, не превышающей какого-то заданного уровня  $\varepsilon$ :

$$\left| Rf_i(\theta_l, r) - Rf_i^e(\theta_l, r) \right| < \varepsilon, \quad r \in [0, 2], \quad i = 1, 2, l = 1, \dots, N$$

где  $Rf_i^e(\theta_l, r)$  - проекции, измеренные с ошибкой.

Тогда значения моментов сферических проекций заданы с погрешностью

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty r^{2m} (Rf_i(\theta_l, r) - Rf_i^e(\theta_l, r)) dr \right| &= \left| \int_0^2 r^{2m} (Rf_i(\theta_l, r) - Rf_i^e(\theta_l, r)) dr \right| \leq \\ &\leq \int_0^2 r^{2m} |Rf_i(\theta_l, r) - Rf_i^e(\theta_l, r)| dr < \int_0^2 \varepsilon r^{2m} dr < \frac{2^{2m+1}}{2m+1} \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Следовательно можно считать, что интегралы от  $Rf_i(\theta_l, r), i = 1, 2, l = 1, \dots, N$ , не совпадают, и производить группировку проекций на основании значений этих интегралов, если выполнено условие

$$\left| \int_0^2 (Rf_i(\theta_j, r) - Rf_i^e(\theta_j, r)) dr \right| > 4\varepsilon$$

для некоторого  $1 \leq j \leq N$ . Если же это условие не выполнено, то можно считать, что они совпадают, и разница между ними возникает за счет погрешностей.



Для оценки погрешности, с которой вычисляются функции моментов сферических проекций, воспользуемся известной оценкой погрешности интерполяции тригонометрическими многочленами [8]. Посчитаем по

формуле (1.1.2) моменты  $J_i^{(m)}(\theta_n)$  в точках  $\theta_n = \frac{2n\pi}{2m+1}$ ,  $i=1,2$ ,  $n=0,\dots,2m$ .

Всего существует  $2^{2m+1}$  способов распределить значения  $J_l^{(m)}(\theta_n)$ ,  $l=1,2$ , по двум группам (на практике число  $2m+1$ , как правило, невелико). Обозначим через  $H$  множество всех возможных распределений. Решим системы уравнений

$$a_{m,0}^h + \sum_{j=1}^m a_{m,j}^h \cos(j\theta_n) + \sum_{j=1}^m b_{m,j}^h \sin(j\theta_n) = J_{i_n}^{(m)}(\theta_n),$$

$$i_n^h = 1 \text{ или } 2 \text{ зависимости от } h, n = 0, \dots, 2m,$$

для всех возможных распределений  $h$  из  $H$ . В результате получим  $2^{2m+1}$  функций (обозначим их  $I_h^{(m)}(\theta)$ ,  $h=1,\dots,2^{2m+1}$ ), претендующих на роль функций моментов  $J_i^{(m)}(\theta)$ ,  $i=1,2$ . Если предположить отсутствие погрешностей, то достаточно, перебирая  $I_h^{(m)}(\theta)$ , проверять, равно ли значение  $I_h^{(m)}(\theta^*)$  какому-либо из значений  $J_i^{(m)}(\theta^*)$ ,  $i=1,2$ , вычисленных по формуле (2) в произвольно выбранной точке  $\theta^*$ , отличной от точек  $\theta_n$ . При том  $h^*$ , при котором равенство имеет место,  $I_{h^*}^{(m)}(\theta)$  совпадает с одной из  $J_i^{(m)}(\theta)$ ,  $i=1,2$ , для всех  $\theta \in [0, 2\pi)$ , поскольку тригонометрические многочлены степени  $m$ , совпадающие более чем в  $2m+1$  точках, тождественно равны.

В случае же наличия погрешностей для функции  $I_{h^*}^{(m)}(\theta)$ , претендующей на роль функции момента  $J_i^{(m)}(\theta)$ ,  $i=1$  или  $i=2$ , в силу (1.1.5) должно выполняться

$$\left| I_{h^*}^{(m)}(\theta_l) - J_1^{(m)}(\theta_l) \right| \leq \varepsilon \frac{2^{2m+1}}{2m+1} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln m \right)$$

или

$$\left| I_{h^*}^{(m)}(\theta_l) - J_2^{(m)}(\theta_l) \right| \leq \varepsilon \frac{2^{2m+1}}{2m+1} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln m \right)$$

для всех  $l=1, \dots, N$ . Поэтому практический алгоритм поиска такой функции  $I_{h^*}^{(m)}(\theta_l)$  можно представить следующим образом.

1. Выбираем распределение  $h$  из множества возможных распределений  $H$  и находим функцию  $I_h^{(m)}(\theta_l)$ ,  $l=1, \dots, N$ .

2. Полагаем  $l=1$ .

3. Проверяем, выполняется ли условие

$$\left| I_h^{(m)}(\theta_l) - J_1^{(m)}(\theta_l) \right| \leq \varepsilon \frac{2^{2m+1}}{2m+1} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln m \right)$$

или

$$\left| I_h^{(m)}(\theta_l) - J_2^{(m)}(\theta_l) \right| \leq \varepsilon \frac{2^{2m+1}}{2m+1} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln m \right),$$

где  $J_1^{(m)}(\theta_l)$  и  $J_2^{(m)}(\theta_l)$  вычисляются по формуле (1.1.2).

4. Если условие не выполнено, то исключаем распределение  $h$  из множества возможных распределений  $H$  и переходим к шагу 1. Если условие выполнено и  $l \neq N$ , то полагаем  $l=l+1$  и переходим к шагу 3. Если же условие выполнено и  $l=N$ , то алгоритм завершает работу и мы полагаем  $I_{h^*}^{(m)}(\theta_l) = I_h^{(m)}(\theta_l)$ ,  $l=1, \dots, N$ . При этом распределение  $h^*$  и определяет группы сферических проекций, соответствующие каждому состоянию случайной функции.

Описанный метод является более трудоемким но при этом в случае наличия погрешностей он дает более точное приближение функций моментов, что позволяет надеяться на более точное восстановление состояний случайной функции.

## ***1.2 Восстановление вероятностных распределений стохастических радиолокационных изображений***

В задачах формирования изображений из сигналов, получаемых радиолокационными станциями (РЛС) с синтезированной апертурой, волновой фронт, излучаемый антенной радара имеет сферическую форму, поэтому полученный сигнал при данном положении антенны и в данный момент времени представляет собой интеграл от коэффициента отражения во всех точках, в которых волновой фронт встречается с поверхностью объектов на местности. Положение антенны обычно меняется со временем вдоль прямой линии, поэтому эту координату принято называть «медленным временем», а интервал времени между передачей и получением импульсного сигнала принято называть «быстрым временем». Если геометрия местности планарна, то множество всех точек пересечения волнового фронта с объектами на местности представляет собой окружность. Поэтому задача формирования изображения может рассматриваться как задача обращения сферического преобразования Радона. По аналогии с классическим преобразованием Радона будем называть сигнал, полученный при фиксированном положении антенны, сферической проекцией, т.е. сферическая проекция представляет собой функцию «быстрого времени» при фиксированном значении «медленного времени».

Функцию нельзя однозначно восстановить по ее сферическим преобразованиям Радона, если центры окружностей интегрирования лежат на прямой (сферическое преобразование Радона любой функции, нечетной относительно этой прямой, равно нулю). Однако в РЛС с синтезированной апертурой либо используется однонаправленная антенна (и поэтому функцию можно считать тождественно равной нулю в полуплоскости, лежащей по одну из сторон относительно прямой, на которой лежат центры окружностей интегрирования), либо используются две антенны для различения полуплоскостей. В любом случае, это позволяет считать функцию коэффициента отражения четной относительно прямой, вдоль

которой движется антенна (будем полагать, что эта прямая совпадает с осью  $OX$ ).

В ряде приложений функцию, описывающую коэффициент отражения, необходимо считать случайной (например, если объекты на местности перемещаются случайным образом). При этом основной особенностью является то обстоятельство, что состояния (реализации) функции, меняются случайным образом во время процесса получения сигналов радара. Это приводит к тому, что восстановление даже одной реализации случайной функции обычными методами невозможно. Основной интерес в такого рода задачах представляют собой вероятностные характеристики функции, описывающей коэффициент отражения.

Пусть коэффициент отражения описывается функцией  $f(x, y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ , четной по второй переменной. Будем полагать, что носителем функции  $f(x, y)$  является круг  $U$  единичного радиуса с центром в начале координат. Определим сферическое преобразование Радона от функции  $f(x, y)$ , как интеграл по окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $(t, 0)$ :

$$Rf(t, r) = \iint_{(x-t)^2 + y^2 = r^2} f(x, y) dx dy.$$

Это определение можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$Rf(t, r) = \int_0^{2\pi} f(t + r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta. \quad (1.2.1)$$

Покажем, что для восстановления дисперсии (и ковариационной функции) случайной функции недостаточно знания ковариационных функций всех сферических проекций, а поскольку существуют случайные функции, вся вероятностная структура которых определяется математическим ожиданием в каждой точке и ковариационной функцией, это означает, что в общем случае задача сильно некорректно поставлена.

**Утверждение.** Существуют две случайные функции  $\xi'(x, y)$  и  $\xi''(x, y)$ , определенные в единичном круге  $U$ , такие, что их ковариационные функции не равны:  $K'(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq K''(x_1, y_1, x_2, y_2)$  при  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in U \times U$ , в то время как ковариационные функции всех сферических проекций совпадают:  $P_t K'(r_1, r_2) = P_t K''(r_1, r_2)$  для всех  $t \in [0, +\infty)$  и  $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^2$ .

Доказательство. Пусть  $E\xi(x, y) = 0$  для всех  $(x, y) \in U$ . Тогда ковариационная функция двумерной случайной функции  $\xi(x, y)$  есть функция от 4-х переменных вида

$$K(x_1, y_1, x_2, y_2) = E\xi(x_1, y_1)\xi(x_2, y_2), (x_1, y_1, x_2, y_2) \in U \times U.$$

Ковариационные функции сферических проекций связаны с ковариационной функцией  $\xi(x, y)$  следующим соотношением:

$$\begin{aligned} P_t K(r_1, r_2) &= ER\xi(t, r_1)R\xi(t, r_2) = \\ &= E \int_0^{2\pi} \xi(t + r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1) r_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} \xi(t + r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2) r_2 d\theta_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E[\xi(t + r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1) r_1 \xi(t + r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2) r_2] d\theta_1 d\theta_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(t + r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1, t + r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2) r_1 r_2 d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Характеристическим свойством ковариационной функции является неотрицательная определенность. Таким образом, если ввести интегральное преобразование

$$P_{t_1, t_2} K(r_1, r_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(t_1 + r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1, t_2 + r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2) r_1 r_2 d\theta_1 d\theta_2,$$

то вопрос о единственности восстановления ковариационной функции случайной функции по ковариационным функциям ее сферических проекций сводится к вопросу единственности восстановления неотрицательно определенной функции  $K(x_1, y_1, x_2, y_2)$  при  $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in U \times U$  по ее

интегральному преобразованию  $P_{t_1, t_2} K(r_1, r_2)$ , заданному на множестве

$M = \{t_1 = t_2\}$ . Определим «квадратичное» преобразование Фурье:

$$\tilde{P}_{t_1, t_2} K(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2)} P_{t_1, t_2} K(r_1, r_2) dr_1 dr_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t_1, t_2} K(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(\omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2)} \times \\ &\times K(t_1 + r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1, t_2 + r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2) r_1 r_2 d\theta_1 d\theta_2 dr_1 dr_2 = \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 ((x_1 - t_1)^2 + y_1^2) + \omega_2 ((x_2 - t_2)^2 + y_2^2))} K(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= 4 e^{-i(\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 (x_1^2 + y_1^2) + \omega_2 (x_2^2 + y_2^2))} K(x_1, y_1, x_2, y_2) \times \\ &\times e^{-i(-2\omega_1 t_1 x_1 - 2\omega_2 t_2 x_2)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \end{aligned}$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$u_1 = x_1^2 + y_1^2, u_2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Таким образом,

$$x_1 = x_1, y_1 = \sqrt{u_1 - x_1^2}, x_2 = x_2, y_2 = \sqrt{u_2 - x_1^2}$$

и

$$dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \frac{1}{4\sqrt{u_1 - x_1^2} \sqrt{u_2 - x_1^2}} dx_1 du_1 dx_2 du_2.$$

Определим функцию

$$K_1(x_1, u_1, x_2, u_2) = \frac{K(x_1, \sqrt{u_1 - x_1^2}, x_2, \sqrt{u_2 - x_1^2})}{\sqrt{u_1 - x_1^2} \sqrt{u_2 - x_2^2}} \text{ при } 0 < x_1^2 < u_1 \text{ и } 0 < x_2^2 < u_2,$$

0 иначе.

Поскольку функция  $K(x_1, y_1, x_2, y_2)$  четна по переменным  $y_1$  и  $y_2$ , нужно рассматривать только положительный квадратный корень.

Используя определение функции  $K_1(x_1, u_1, x_2, u_2)$ , можно переписать функцию  $\tilde{P}_{t_1, t_2} K(\omega_1, \omega_2)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t_1, t_2} K(\omega_1, \omega_2) &= e^{-i(\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2)} K_1(x_1, u_1, x_2, u_2) \times \\ &\times e^{-i(-2\omega_1 t_1 x_1 - 2\omega_2 t_2 x_2)} dx_1 du_1 dx_2 du_2 = e^{-i(\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2)} \hat{K}_1(-2\omega_1 t_1, \omega_1, -2\omega_2 t_2, \omega_2), \end{aligned}$$

где функция

$$\hat{K}_1(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \beta_1 u_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_2 u_2)} K_1(x_1, u_1, x_2, u_2) dx_1 du_1 dx_2 du_2$$

представляет собой преобразование Фурье от функции  $K_1(x_1, u_1, x_2, u_2)$ .

Сделаем следующую замену переменных:

$$v_1 \cos \varphi_1 = -2\omega_1 t_1, \quad \omega_1 = v_1 \sin \varphi_1,$$

$$v_2 \cos \varphi_2 = -2\omega_2 t_2, \quad \omega_2 = v_2 \sin \varphi_2.$$

При этом

$$t_1 = -\frac{1}{2} \varphi_1, \quad t_2 = -\frac{1}{2} \varphi_2.$$

Пусть  $G \subset U \times U$  - произвольное компактное множество, симметричное относительно плоскости  $\{x_1 = x_2, u_1 = u_2\}$ . И пусть  $K_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^4)$  - произвольная симметричная относительно пар переменных  $(x_1, u_1)$  и  $(x_2, u_2)$  функция.

Существует функция  $K_1(x_1, u_1, x_2, u_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)$ , симметричная относительно пар переменных  $(x_1, u_1)$  и  $(x_2, u_2)$ , такая что ее носитель принадлежит множеству  $U \times U$ ,  $K_1 = K_2$  на множестве  $G$  и  $\hat{K}_1(v_1 \cos \varphi_1, v_1 \sin \varphi_1, v_2 \cos \varphi_2, v_2 \sin \varphi_2) \equiv 0$  на множестве  $M_1 = \{\varphi_1 = \varphi_2\}$ . Причем  $G$ ,  $K_1$  и  $K_2$  можно построить таким образом, что  $K_1(x_1, u_1, x_2, u_2) = 0$  при  $u_1 \geq x_1^2$  или  $u_2 \geq x_2^2$ .

Следовательно, существует функция  $K(x_1, y_1, x_2, y_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)$ , не равная тождественно нулю, симметричная относительно пар переменных  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  и такая, что  $P_{t_1, t_2} K(r_1, r_2) = 0$  при  $t_1 = t_2$  и  $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^2$ .

Любая функция  $K(x_1, y_1, x_2, y_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)$ , определенная на множестве  $U \times U$  и симметричная относительно пар переменных  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , может быть представлена в виде разности неотрицательно определенных функций  $K'(x_1, y_1, x_2, y_2)$  и  $K''(x_1, y_1, x_2, y_2)$  [15]. Следовательно, существуют неотрицательно определенные функции  $K'(x_1, y_1, x_2, y_2)$  и  $K''(x_1, y_1, x_2, y_2)$ , являющиеся ковариационными функциями некоторых случайных функций  $\xi'(x, y)$  и  $\xi''(x, y)$ , такие что  $K'(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq K''(x_1, y_1, x_2, y_2)$ , но  $P_t K'(r_1, r_2) = P_t K''(r_1, r_2)$  для всех  $t \in [0, +\infty)$  и  $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^2$ .

Утверждение доказано.

Таким образом, знание ковариационных функций сферических проекций не позволяет однозначно восстановить ковариационную функцию самой случайной функции. Кроме того, поскольку функция  $K$  достаточно произвольна, ее можно выбрать такой, что  $K(x, y, x, y)$  не равна тождественно нулю на  $U \times U$ , и этот пример показывает, что знания ковариационных функций сферических проекций недостаточно и для однозначного восстановления дисперсии случайной функции.

Далее мы сузим класс допустимых случайных функций и рассмотрим следующую задачу. Имеется двумерная случайная функция  $\xi(x, y)$  вида

$$\xi(x, y) = f_\nu(x, y), \quad (1.2.2)$$

где  $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots$  - последовательность интегрируемых функций, определенных в круге  $U$ , а  $\nu$  - случайная величина, принимающая целые положительные значения. Вероятностная структура  $\xi(x, y)$  полностью определяется набором

$$(f_1(x, y), f_2(x, y), \dots; p_1, p_2, \dots),$$



где  $p_i = P(\xi(x, y) = f_i(x, y))$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ . Распределение  $\xi(x, y)$

будем обозначать через  $P_\xi$ , а распределения ее сферических проекций (при фиксированном  $t$ ) через  $P_{\xi(t)}$ . Требуется определить распределение  $P_\xi$  по распределениям  $P_{\xi(t)}$  для  $t \in T$ , где  $T$  - некоторое подмножество  $\mathbf{R}$ .

Прежде чем обратиться к этой задаче, рассмотрим вопрос о том, каким должно быть множество  $T$ , чтобы задача обращения преобразования (1.2.1) имела единственное решение. Справедлива следующая теорема [13].

**Теорема 1.3.** Пусть функция  $f(x, y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$  четна по второй переменной, и  $Rf(t, r) = 0$  на открытом множестве  $U_{\rho, \varepsilon} = \{(t, r) : |t - t_0| < \varepsilon, 0 \leq r < \rho\}$ . Тогда  $f(x, y) = 0$  на открытом множестве  $V_\rho = \{(x, y) : |x - t_0|^2 + y^2 < \rho^2\}$ . В частности, если  $Rf(t, r) = 0$  в полосе  $\{(t, r) : |t - t_0| < \varepsilon, 0 \leq r < \infty\}$ , то  $f(x, y) \equiv 0$ .

Доказательство. Определим функцию

$$G(t, r) = \int_0^r Rf(t, s) ds = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(t + s \cos \theta, s \sin \theta) s d\theta ds = \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(t + x, y) dx dy.$$

Имеем

$$\begin{aligned} G'_t(t, r) &= \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f'_t(t + x, y) dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f'_x(t + x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{r} \iint_{x^2 + y^2 = r^2} f(t + x, y) x dx dy, \end{aligned}$$

где при переходе к последнему интегралу мы воспользовались интегрированием по частям и учли четность функции  $f(x, y)$  по второй переменной. При этом от интегрирования по кругу  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$  мы перешли к интегрированию по окружности  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ . Пусть  $g(x, y) = xf(x, y)$ . Имеем

$$\begin{aligned}
Rg(t, r) &= \int_0^{2\pi} f(t + r \cos \theta, r \sin \theta) (t + r \cos \theta) r d\theta = \\
&= tRf(t, r) + \int_0^{2\pi} f(t + r \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta d\theta = \quad (1.2.3) \\
&= tRf(t, r) + \iint_{x^2 + y^2 = r^2} f(t + x, y) x dx dy = \\
&= tRf(t, r) + rG'_t(t, r) = D_x(Rf)(t, r),
\end{aligned}$$

т.е.  $R(xf)(t, r) = D_x(Rf)(t, r)$ , где линейный оператор  $D_x$  определяется выражением (1.2.3). Повторяя рассуждения, для любого многочлена  $p(x)$  получаем  $R(p(x)f)(t, r) = p(D_x)(Rf)(t, r)$ . Далее

$$\begin{aligned}
R(p(x)f)(t, r) &= p(D_x)(Rf)(t, r) = \iint_{x^2 + y^2 = r^2} f(t + x, y) p(t + x) dx dy = \\
&= 2r \int_{-r}^r p(t + x) \frac{f(t + x, \sqrt{r^2 - x^2})}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.
\end{aligned}$$

Если  $Rf(t, r) = 0$  при  $(t, r) \in U_{\rho, \varepsilon}$ , то  $p(D_x)(Rf)(t, r) = 0$  при  $(t, r) \in U_{\rho, \varepsilon}$ .

Следовательно,

$$\int_{-r}^r p(t + x) \frac{f(t + x, \sqrt{r^2 - x^2})}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 0 \quad (1.2.4)$$

для всех  $(t, r) \in U_{\rho, \varepsilon}$  и любого многочлена  $p(x)$ . При фиксированных  $t$  и  $r$  выберем последовательность многочленов  $p_n(x)$  так, чтобы  $p_n(t + x) \rightarrow f(t + x, \sqrt{r^2 - x^2})$  равномерно при  $|x| \leq r$ . Тогда из (1.2.4) следует, что  $f(x, y) = 0$  на множестве  $V_\rho$ .

Чтобы получить второе утверждение, достаточно устремить  $\rho$  к бесконечности. Теорема доказана.

Используя доказанную теорему, можно показать, что распределение двумерной случайной функции вида (1.2.1) полностью определяется распределениями сферических проекций, а именно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.4.** Пусть случайные функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  имеют вид (1.2.2), и

$$P_{\xi}^{(t)} = P_{\eta}^{(t)}$$

для всех  $t \in T$ , где  $T$  - любое подмножество  $\mathbf{R}$  положительной меры, тогда

$$P_{\xi} = P_{\eta}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что  $T = \{t \in \mathbf{R} : |t - t_0| < \varepsilon\}$  для некоторого  $t_0 \in \mathbf{R}$  и некоторого  $\varepsilon > 0$ . Предположим, что  $P_{\xi} \neq P_{\eta}$ . Это означает, что существует функция  $f(x, y)$  с носителем в круге  $U$  такая, что

$$P(\xi(x, y) = f(x, y)) \neq P(\eta(x, y) = f(x, y)).$$

Обозначим через  $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots$  значения случайной функции  $\xi(x, y)$ , отличные от  $f(x, y)$ , и через  $g_1(x, y), g_2(x, y), \dots$  обозначим аналогичные значения  $\eta(x, y)$  (таким образом,  $f(x, y) \neq f_i(x, y)$  и  $f(x, y) \neq g_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ). Для каждого фиксированного  $i = 1, 2, \dots$  пусть  $A_i$  обозначает множество всех  $t \in T$ , для которых

$$Rf(t, r) \equiv Rf_i(t, r)$$

и, соответственно,  $B_i$  - множество всех  $t \in T$ , для которых

$$Rf(t, r) \equiv Rg_i(t, r).$$

Каждое из множеств  $A_i$  и  $B_i$  имеет меру нуль. Если для некоторого  $i$  это было бы не так, то  $Rf(t, r)$  совпадала бы с  $Rf_i(t, r)$  или с  $Rg_i(t, r)$  на подмножестве  $T$  положительной меры (т. е. в некоторой полосе  $\{(t, r) : |t - t'| < \delta, 0 \leq r < \infty\}$ ), и в силу теоремы 1.3 это влекло бы за собой совпадение функции  $f(x, y)$  с функцией  $f_i(x, y)$  или с функцией  $g_i(x, y)$ .

Таким образом, множество

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i)$$

имеет меру нуль, следовательно, множество  $T \setminus C$  непусто. Возьмем произвольное  $t \in T \setminus C$ . Поскольку для этого  $t$  выполнено  $Rf(t, r) \neq Rf_i(t, r), i = 1, 2, \dots$ , следовательно,

$$P(R\xi(t, r) = Rf(t, r)) = P(\xi(x, y) = f(x, y)),$$

и аналогично

$$P(R\eta(t, r) = Rf(t, r)) = P(\eta(x, y) = f(x, y)).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Как следует из доказанной теоремы, если случайная функция принимает не более чем счетное число состояний, то возможно восстановить ее распределение, зная распределения сферических проекций на множестве  $T$  положительной меры. В этом пункте будет разработан метод разделения множества зарегистрированных сферических проекций на группы, соответствующие различным состояниям случайной функции. Для удобства будем полагать, что  $T$  представляет собой некоторый отрезок  $[t_1, t_2]$ .

Для простоты рассмотрим класс функций, имеющих всего два состояния. Обобщение на любое конечное число состояний очевидно, а для случая счетного числа состояний можно произвести процедуру «усечения» распределений сферических проекций.

Пусть случайная функция  $\xi(x, y)$  принимает значения  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Предполагается, что известны распределения сферических проекций для всех фиксированных  $t \in [t_1, t_2]$  (для каждого  $t \in [t_1, t_2]$  известны функции  $Rf_i(t, r), i = 1, 2$ , являющиеся проекциями функций  $f_i(x, y), i = 1, 2$ , и реализующиеся с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$ ). Причем, вообще говоря, заранее неизвестно, какому состоянию случайной функции соответствует данная реализация сферической проекции ( $Rf_1(t, r)$  может быть проекцией  $f_2(x, y)$ , а  $Rf_2(t, r)$  - проекцией  $f_1(x, y)$ ). Необходимо распределить функции  $Rf_i(t, r), i = 1, 2$ , для всех  $t \in [t_1, t_2]$  по группам так, чтобы каждая группа состояний проекций относилась к одному состоянию случайной функции.

Если  $p_1 \neq p_2$ , тогда распределение по группам можно произвести на основании вероятностей состояний проекций (для всех  $t \in [t_1, t_2]$  значение  $Rf_i(t, r)$ , реализующееся с вероятностью  $p_1$ , относится к первой группе, а значение  $Rf_i(t, r)$ , реализующееся с вероятностью  $p_2$ , ко второй).

В случае, когда  $p_1 = p_2 = 1/2$ , метод группировки проекций основан на использовании некоторых свойств сферических проекций [2].

**Лемма 1.2.** Пусть  $Rf(t, r)$  - сферическая проекция функции  $f(x, y)$ , имеющей носитель в круге  $U$ , тогда интеграл

$$J^{(k)}(t) = \int_0^{\infty} r^{2k} Rf(t, r) dr, k = 0, 1, \dots, \quad (1.2.5)$$

называемый  $2k$ -м моментом сферической проекции  $Rf(t, r)$ , представляет собой многочлен от  $t$  степени не выше чем  $2k$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r^{2k} Rf(t, r) dr &= \int_0^{\infty} r^{2k} \int_0^{2\pi} f(t + r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((x-t)^2 + y^2)^k f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2 - 2xt + t^2)^k f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Указанные интегралы существуют, так как функция  $f(x, y)$  имеет носитель в круге  $U$ . Последний интеграл, очевидно, представляет собой многочлен от  $t$  степени не выше чем  $2k$ . Лемма доказана.

**Лемма 1.3.** Пусть функция  $f(x, y)$  имеет носитель в круге  $U$ , тогда при фиксированном  $t \in [t_1, t_2]$

$$Rf(t, r) \equiv 0$$

при  $r \in (0, \infty)$  тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\infty} r^{2k} Rf(t, r) dr = 0 \quad (1.2.6)$$

для всех  $k = 0, 1, \dots$

Доказательство. Поскольку функция  $f(x, y)$  имеет носитель в круге  $U$ , при фиксированном  $t \in [t_1, t_2]$  функция  $Rf(t, r)$  имеет компактный носитель. Следовательно, интеграл в (1.2.6) на самом деле имеет конечные пределы. Условие  $Rf(t, r) \equiv 0$  эквивалентно тому, что

$$\int_0^{\infty} g(r^2)Rf(t, r)dr = 0$$

для любой непрерывной функции  $g(r)$ , имеющей компактный носитель. В свою очередь, любую такую функцию можно равномерно приблизить многочленом. Лемма доказана.

Используя приведенные леммы, можно построить метод группировки.

Сначала вычисляются интегралы

$$\int_0^{\infty} Rf_i(t, r)dr, i = 1, 2, \quad (1.2.7)$$

при фиксированном  $t \in [t_1, t_2]$ . Если эти интегралы отличны друг от друга, то поскольку их значения не зависят от  $t$  (они представляют собой многочлены нулевой степени), можно произвести группировку, основываясь на этих значениях. Для каждого  $t \in [t_1, t_2]$  вычисляя интегралы по  $r$  от  $Rf_i(t, r), i = 1, 2$ , мы относим сферическую проекцию  $Rf_i(t, r)$  к той или иной группе, в зависимости от того, чему равно значение интеграла. В результате в каждой группе окажутся сферические проекции  $Rf_i(t, r), t \in [t_1, t_2]$ , интегралы от которых по  $r$  равны одному и тому же значению.

Если интегралы в (1.2.7) совпадают, то рассматриваются моменты  $J_i^{(k)}(t)$ . В силу леммы 2, если все моменты  $J_i^{(k)}(t)$  двух функций совпадают между собой, то эти функции эквивалентны. Значит, если сферические проекции  $Rf_i(t, r), i = 1, 2$ , различны, то найдется номер  $m$ , для которого моменты  $J_i^{(m)}(t), i = 1, 2$ , различаются. Поскольку моменты являются многочленами от  $t$ , значит, они либо тождественно равны, либо пересекаются в конечном числе точек. Пусть точка  $t \in [t_1, t_2]$  выбрана таким

образом, что в ее окрестности разность между функциями  $2m$ -х моментов проекций  $Rf_i(t, r), i=1,2$ , по модулю больше некоторого  $\delta$ . Вычислив значения  $J_i^{(m)}(t_j), i=1,2$ , в  $2m+1$  близких точках  $t_j$  из этой окрестности, можно разделить эти значения на группы, соответствующие каждому состоянию случайной функции (если разности  $J_1^{(m)}(t_j) - J_2^{(m)}(t_j)$  и  $J_1^{(m)}(t_{j+1}) - J_2^{(m)}(t_{j+1})$  имеют разный знак, значит значения  $J_1^{(m)}(t_j)$  и  $J_1^{(m)}(t_{j+1})$  соответствуют разным состояниям случайной функции, и следует поменять местами  $Rf_1(t_{j+1}, r)$  и  $Rf_2(t_{j+1}, r)$ ). Затем можно найти явный вид функций моментов  $J_i^{(m)}(t), i=1,2$ , от переменной  $t$ . Для этого нужно решить следующие две линейные системы уравнений:

$$\sum_{n=0}^{2m} a_{m,n}^{(i)} t_j^n = J_i^{(m)}(t_j), \quad j=0 \dots 2m, \quad i=1,2, \quad (1.2.8)$$

и найти коэффициенты  $a_{m,n}^{(i)}$  многочленов, которыми представляются функции  $J_i^{(m)}(t)$ .

Системы (1.2.8) решаются с помощью того же метода, который используется при выводе интерполяционного многочлена Лагранжа. В результате имеем

$$J_i^{(m)}(t) = \sum_{j=0}^{2m} J_i^{(m)}(t_j) \prod_{k=0, k \neq j}^{2m} \frac{t - t_k}{t_j - t_k}, \quad i=1,2. \quad (1.2.9)$$

Далее, вычисляя значение  $J_i^{(m)}(t)$  для каждого  $t \in [t_1, t_2]$  по формуле (1.2.5), относим сферические проекции к той или иной группе, в зависимости от того, со значением какой из функций (1.2.9) в точке  $t$  совпадает это вычисленное значение.

После распределения проекций по группам, можно восстановить каждое состояние случайной функции (а значит и ее распределение) с помощью обычных формул обращения.

В практических ситуациях проекции задаются не точно, а с некоторой погрешностью. Погрешности возникают вследствие несовершенства оборудования, регистрирующего проекции, случайных помех при измерении, ошибок интерполяции и других причин.

Мы будем предполагать, что сферические проекции каждого состояния случайной функции  $\xi(x, y)$  заданы с погрешностью, не превышающей заданного уровня  $\varepsilon$ :

$$\left| Rf_i(t, r) - Rf_i^e(t, r) \right| < \varepsilon, \quad r \in [0, \infty], \quad i = 1, 2,$$

где  $Rf_i^e(t, r)$  - проекции, измеренные с погрешностью.

В этом случае значения моментов сферических проекций вычисляются с погрешностью

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} r^{2m} (Rf_i(t, r) - Rf_i^e(t, r)) dr \right| &\leq \int_0^{\rho_t} r^{2m} |Rf_i(t, r) - Rf_i^e(t, r)| dr < \\ &< \int_0^{\rho_t} \varepsilon r^{2m} dr < \frac{\rho_t^{2m+1}}{2m+1} \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

где  $\rho_t$  - радиус носителя  $Rf_i(t, r)$  при фиксированном  $t \in [t_1, t_2]$ .

Следовательно, можно считать, что интегралы в (7) не совпадают, и производить группировку сферических проекций на основании значений этих интегралов, если выполнено условие

$$\left| \int_0^{\rho_t} (Rf_i(t, r) - Rf_i^e(t, r)) dr \right| > 2\rho_t \varepsilon$$

для некоторого  $t \in [t_1, t_2]$ . Если это условие не выполнено, то можно считать, что интегралы совпадают, и разница между ними возникает за счет погрешностей.

Для оценки погрешности, с которой вычисляются функции моментов сферических проекций, воспользуемся известной оценкой погрешности интерполяции многочленами Чебышева [8]. Посчитаем по формуле (1.2.5)



моменты  $J_i^{(m)}(t_j)$  в Чебышевских точках  $t_j$  на отрезке  $[t_1, t_2]$ ,  $i=1,2$ ,  $j=0, \dots, 2m$ . Всего существует  $2^{2m+1}$  способов распределить значения  $J_i^{(m)}(t_j)$ ,  $i=1,2$ , по двум группам (на практике число  $2m+1$ , как правило, невелико). Обозначим через  $H$  множество всех возможных распределений и решим системы уравнений

$$\sum_{n=0}^{2m} a_{m,n}^{(i)} t_j^n = J_{i,h}^{(m)}(t_j),$$

$$i_n^h = 1 \text{ или } 2 \text{ зависимости от } h, n = 0, \dots, 2m,$$

для всех  $h$  из  $H$ . В результате получим  $2^{2m+1}$  функций (обозначим их через  $I_h^{(m)}(t)$ ,  $h=1, \dots, 2^{2m+1}$ ), претендующих на роль функций моментов  $J_i^{(m)}(t)$ ,  $i=1,2$ . Если предположить отсутствие погрешностей, то достаточно, перебирая функции  $I_h^{(m)}(t)$ , проверять, равно ли значение  $I_h^{(m)}(t^*)$  какому-либо из значений  $J_i^{(m)}(t^*)$ ,  $i=1,2$ , вычисленных по формуле (1.2.5), в произвольно выбранной точке  $t^* \in [t_1, t_2]$ , отличной от точек  $t_j$ . При том  $h^*$ , при котором равенство имеет место,  $I_{h^*}^{(m)}(t)$  совпадает с одной из  $J_i^{(m)}(t)$ ,  $i=1,2$ , для всех  $t \in [t_1, t_2]$ , поскольку многочлены степени  $2m$ , совпадающие более чем в  $2m+1$  точках, тождественно равны.

В случае же наличия погрешностей для функции  $I_{h^*}^{(m)}(t)$ , претендующей на роль функции момента  $J_i^{(m)}(t)$ ,  $i=1$  или  $i=2$ , в силу (1.2.10) должно выполняться

$$\left| I_{h^*}^{(m)}(t) - J_1^{(m)}(t) \right| \leq \varepsilon \frac{\rho^{2m+1}}{2m+1} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln(2m) \right)$$

или

$$\left| I_{h^*}^{(m)}(t) - J_2^{(m)}(t) \right| \leq \varepsilon \frac{\rho^{2m+1}}{2m+1} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln(2m) \right),$$

где  $\rho = \max_{t \in [t_1, t_2]} \rho_t$ . Если  $\varepsilon$  достаточно мало, то существует всего 2

распределения  $h_1$  и  $h_2$  из  $H$ , для которых эти неравенства справедливы при всех  $t \in [t_1, t_2]$ . Для этих распределений многочлены  $I_{h_i}^{(m)}(t)$ ,  $i = 1, 2$ , и будут приближениями для функций  $J_i^{(m)}(t)$ .

Описанный метод является более трудоемким при этом в случае наличия погрешностей он дает более точное приближение функций моментов, что позволяет надеяться на более точное восстановление состояний случайной функции.

## 2 Разработка устойчивого метода реконструкции стохастических радиолокационных, термо- и опто-акустических томографических изображений

### 2.1 Регуляризация метода реконструкции термо- и опто-акустических томографических изображений

На практике сферическое преобразование Радона известно лишь для конечного числа центров окружностей (сфер), и в этом случае задача обращения уже не имеет единственного решения даже в случае классического преобразования Радона, что приводит к так называемому парадоксу компьютерной томографии [18], [19].

Пусть  $f(x)$  - бесконечно дифференцируемая функция с носителем в круге  $U$  единичного радиуса с центром в начале координат. Переопределим сферическое преобразование Радона на плоскости следующим образом:

$$Rf(p, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(p + r\theta) d\theta. \quad (2.1.1)$$

Здесь  $S^1$  - множество направлений, задаваемых единичными векторами в  $\mathbf{R}^2$  с центром в начале координат,  $p \in S^1$  (т.е.  $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ), а  $r \in (0, \infty)$ .

Известны следующие формулы обращения.

**Теорема 2.1.** Пусть  $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$  имеет носитель в круге  $U$ . Тогда для  $x \in U$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \Delta_x \int_{S^1} \int_0^2 r Rf(p, r) \log|r^2 - |x - p|^2| dr dp, \quad (2.1.2)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \int_0^2 (r(Rf)'_r(p, r))'_r \log|r^2 - |x - p|^2| dr dp. \quad (2.1.3)$$

Здесь  $\Delta_x$  - оператор Лапласа.

Функция  $Rf(p, r)$  естественным образом доопределяется для отрицательных  $r$  как четная функция. Однако если вместо этого доопределить ее нечетным образом, тогда из формул (2.1.2) и (2.1.3) можно получить следующую формулу обращения.

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы, и по второй переменной  $Rf(p, r)$  доопределена как нечетная функция при отрицательных значениях  $r$ , тогда для  $x \in U$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} |x - p| \int_{-2}^2 \frac{(Rf)'_r(p, r)}{|x - p| - r} dr dp. \quad (2.1.4)$$

Внутренний интеграл понимается в смысле главного значения.

Формула (2.1.4) очень похожа на стандартную формулу обращения классического преобразования Радона [20]. Для дальнейшего перепишем ее в несколько ином виде. Поскольку функция  $f(x)$  имеет носителем круг  $U$ , пределы внутреннего интегрирования можно продолжить от  $-\infty$  до  $\infty$ . Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{S^1} |x - p| Q(p, |x - p|) dp,$$

где

$$Q(p, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Rf)'_r(p, r)}{s - r} dr.$$

Функция  $Q(p, s)$  равна преобразованию Гильберта от функции  $(Rf)'_r(p, r)$  по второй переменной. Преобразование Гильберта для функции  $g(r)$  определяется как

$$Hg(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(r)}{s - r} dr.$$

Если перейти к преобразованиям Фурье вида

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} g(r) dr,$$

то

$$\hat{H}g(\omega) = \frac{\text{sgn}(\omega)}{i} \hat{g}(\omega). \quad (2.1.5)$$

Воспользовавшись формулой (2.1.5) и свойством преобразования Фурье от производной, имеем

$$\hat{Q}(p, \omega) = |\omega| \hat{R}f(p, \omega).$$

Следовательно, формулу (2.1.4) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{S^1} |x - p| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega|x-p|} |\omega| \hat{R}f(p, \omega) d\omega dp. \quad (2.1.6)$$

Задача восстановления функции  $f(x)$  по ее сферическим проекциям является некорректно поставленной, и кроме того, на практике сферические проекции регистрируются только для конечного числа точек  $p$ , поэтому вместо точной формулы (2.1.6) нужно использовать ее регуляризованный вариант, в котором преобразование Гильберта  $H$  заменяется на преобразование  $H_\sigma$ , для которого

$$\hat{H}_\sigma g(\omega) = \frac{\text{sgn}(\omega)}{i} \hat{g}(\omega) W_\sigma(\omega),$$

где множитель  $W_\sigma(\omega)$  играет роль регуляризирующего окна. В результате вместо точной функции  $f(x)$  получается приближенная функция  $f_\sigma(x)$ , но метод реконструкции становится устойчивым к погрешностям. В дальнейшем мы будем использовать регуляризирующее окно вида

$$W_\sigma(\omega) = e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2}.$$

Пусть  $F_U$  - класс всех неотрицательных функций  $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$  с носителем в единичном круге  $U$ , таких, что

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^2} \|\text{grad} f(x)\| \leq C.$$

Для регуляризованной формулы обращения в классе  $F_U$  можно получить оценку точности реконструкции функции по конечному числу сферических проекций. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Пусть  $N = 2n$ , где  $n$  - натуральное число, и  $p_1, \dots, p_N$  выбраны следующим образом:

$$p_j = (v_j, -1)/(v_j^2 + 1)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$p_j = (1, v_{j-n})/(v_{j-n}^2 + 1)^{1/2}, \quad j = n+1, \dots, 2n,$$

где

$$v_k = \cos(\pi(2k-1)/(2n)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Если  $f(x), g(x) \in F_U$ , и сферические проекции функций  $f(x)$  и  $g(x)$  (доопределенные нечетным образом для отрицательных  $r$  согласно следствию из теоремы 2.1) совпадают для  $p$ , равного  $p_j$  и  $-p_j$ ,  $j=1, \dots, N$ , т.е.

$$Rf(\pm p_j, r) = Rg(\pm p_j, r), \quad r \in \mathbf{R}, \quad j = 1, \dots, N,$$

тогда

$$\sup_{x \in U} |f_\sigma(x) - g_\sigma(x)| \leq \left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \frac{2C}{n\sigma^2}. \quad (2.1.7)$$

Доказательство. Используя регуляризованный вариант формулы (2.1.7), имеем

$$\begin{aligned} |f_\sigma(x) - g_\sigma(x)| &= \left| \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} |x-p| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega|x-p|} |\omega| e^{-\omega^2\sigma^2/2} h(p, \omega) d\omega dp \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{S^1} |x-p| \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{-\omega^2\sigma^2/2} |h(p, \omega)| d\omega dp, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

где  $h(p, \omega) = \hat{R}f(p, \omega) - \hat{R}g(p, \omega)$ . Оценим  $|h(p, \omega)| = |h(p(\varphi), \omega)|$ . Для всех  $\varphi \in [\varphi_j - \pi/(2n), \varphi_j]$  и  $\varphi \in [\varphi_j, \varphi_j + \pi/(2n)]$ ,  $j=1, \dots, N$ , используя формулу конечных приращений, имеем

$$|h(p(\varphi), \omega)| = |h(p(\varphi), \omega)| - |h(p(\varphi_j), \omega)| \leq |h(p(\varphi), \omega) - h(p(\varphi_j), \omega)| \leq$$

$$\sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |h'_\varphi(p(\varphi), \omega)| |\varphi - \varphi_j| \leq \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |h'_\varphi(p(\varphi), \omega)| \frac{\pi}{2n}.$$

Далее, учитывая тот факт, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют носители в круге  $U$ , получаем

$$\begin{aligned} |h'_\varphi(p(\varphi), \omega)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f'_\varphi(p(\varphi) + r\theta) - g'_\varphi(p(\varphi) + r\theta) d\theta dr \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-2}^2 \int_{S^1} |f'_\varphi(p(\varphi) + r\theta)| + |g'_\varphi(p(\varphi) + r\theta)| d\theta dr \leq \frac{8C}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех  $p \in S^1$  имеем

$$|h(p, \omega)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}C}{n}.$$

Подставляя эту оценку в (2.1.8), получаем

$$|f_\sigma(x) - g_\sigma(x)| \leq \frac{C}{n} \int_{S^1} |x - p| \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{-\omega^2 \sigma^2 / 2} d\omega dp \leq \frac{2C}{n\sigma^2} \int_{S^1} |x - p| dp. \quad (2.1.9)$$

Оценим последний интеграл. Воспользуемся тем, что  $p = p(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ , и что подинтегральная функция имеет период  $2\pi$ .

Имеем

$$\int_{S^1} |x - p| dp = \int_{S^1} \sqrt{|x|^2 - 2(x, p) + 1} dp = \int_0^{2\pi} \sqrt{|x|^2 - 2|x|\cos \varphi + 1} d\varphi.$$

Подинтегральная функция зависит от  $x$  только через  $|x|$ . При этом, поскольку  $x \in U$ ,  $|x| \leq 1$ . При  $|x| \leq 1$  максимум выражения  $|x|^2 - 2|x|\cos \varphi + 1$  достигается в точке  $|x| = 0$ , если  $\cos \varphi \geq 1/2$ , и в точке  $|x| = 1$ , если  $\cos \varphi < 1/2$ .

Таким образом для всех  $x \in U$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{|x|^2 - 2|x|\cos \varphi + 1} d\varphi \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \sqrt{2 - 2\cos \varphi} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} d\varphi = 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Подставляя эту оценку в (2.1.9), получаем (2.1.7). Теорема доказана.

На практике, в силу несовершенства оборудования и наличия шума, сферические проекции регистрируются с некоторой погрешностью. Если предположить, что погрешность не превосходит заданного уровня  $\varepsilon$ , то можно получить оценку точности реконструкции с учетом этой погрешности. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.3.** Пусть сферические проекции функций  $f(x), g(x) \in \mathbf{F}_U$  (доопределенные нечетным образом для отрицательных  $r$  согласно следствию из теоремы 1) отличаются не более чем на  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) для  $p$ , равного  $p_j$  и  $-p_j$ ,  $j=1, \dots, N$ , где  $p_j$  те же, что и в предыдущей теореме, т.е.

$$\sup_{r \in \mathbf{R}} |Rf(\pm p_j, r) - Rg(\pm p_j, r)| \leq \varepsilon, \quad j=1, \dots, N,$$

тогда

$$\sup_{x \in U} |f_\sigma(x) - g_\sigma(x)| \leq \left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{2\varepsilon}{\pi\sigma^2} + \frac{2C}{n\sigma^2}\right). \quad (2.1.10)$$

Доказательство. Поступая так же, как в теореме 2.2 при оценке  $|h(p, \omega)| = |h(p(\varphi), \omega)|$ , для всех  $\varphi \in [\varphi_j - \pi/(2n), \varphi_j]$  и  $\varphi \in [\varphi_j, \varphi_j + \pi/(2n)]$ ,  $j=1, \dots, N$ , имеем

$$\begin{aligned} |h(p(\varphi), \omega)| &= |h(p(\varphi), \omega) - h(p(\varphi_j), \omega)| + |h(p(\varphi_j), \omega)| \leq \\ &\leq |h(p(\varphi), \omega) - h(p(\varphi_j), \omega)| + |h(p(\varphi_j), \omega)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}C}{n} + |h(p(\varphi_j), \omega)|. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} |h(p(\varphi_j), \omega)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r} (Rf(p(\varphi_j), r) - Rg(p(\varphi_j), r)) dr \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 |Rf(p(\varphi_j), r) - Rg(p(\varphi_j), r)| dr \leq \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех  $p \in S^1$



$$|h(p, \omega)| \leq \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2\sqrt{2\pi}C}{n}.$$

Подставляя эту оценку в (2.1.8) и, действуя, как в теореме 2.2, получаем (2.1.10). Теорема доказана.

Правая часть в оценке (2.1.7) из теоремы 2.2 с ростом  $n$  убывает со скоростью  $O(1/n)$ , а правая часть в оценке (2.1.10) из теоремы 2.3 с ростом  $n$  и уменьшением  $\varepsilon$  убывает со скоростью  $O(\varepsilon) + O(1/n)$ . Это означает, что использование регуляризованной формулы обращения (2.1.6) приводит к устойчивому методу реконструкции функции по конечному числу сферических проекций.

## **2.2 Оценки погрешности при реконструкции радиолокационных изображений**

На практике сигнал радара также регистрируется в конечном числе точек положения антенны, т.е. сферическое преобразование Радона известно лишь для конечного числа центров окружностей (сфер). В данном параграфе мы получим подобные оценки в случае использования сферического преобразования Радона с конечным числом центров окружностей, лежащих на конечном отрезке прямой, вдоль которой перемещается антенна.

Существует несколько методов реконструкции функции  $f(x, y)$  по ее сферическому преобразованию Радона в задачах реконструкции радиолокационных изображений. Мы будем использовать метод Фурье-синтеза [21].

Определим функцию  $\hat{R}f(t, \omega)$ :

$$\hat{R}f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r^2} Rf(t, r) dr. \quad (2.2.1)$$

Подставляя в эту формулу выражение  $Rf(t, r)$  и переходя к декартовой системе координат, имеем

$$\begin{aligned}
\hat{R}f(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r^2} \int_0^{2\pi} f(t + r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr = \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega((x-t)^2 + y^2)} f(x, y) dx dy = \\
&= 2e^{-i\omega t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\omega t x} e^{-i\omega(x^2 + y^2)} f(x, y) dx dy.
\end{aligned}$$

Пусть  $u = x^2 + y^2$ . Якобиан перехода от переменных  $(x, y)$  к переменным  $(x, u)$  равен  $(2\sqrt{u - x^2})^{-1}$ . Учитывая четность функции  $f(x, y)$ , определим функцию  $k_f(x, u)$ :

$$k_f(x, u) = \begin{cases} \frac{f(x, \sqrt{u - x^2})}{\sqrt{u - x^2}} & \text{при } 0 < x^2 < u, 0 \\ 0 & \text{при } u \leq x^2, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

и продолжим ее четным образом на отрицательные значения  $u$ . Используя (2.2.2), функцию  $\hat{R}f(t, \omega)$  можно переписать в следующем виде:

$$\hat{R}f(t, \omega) = e^{-i\omega t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\omega t x} e^{-i\omega u} k_f(x, u) dx du = e^{-i\omega t^2} \hat{k}_f(-2t\omega, \omega),$$

где  $\hat{k}_f(\omega_1, \omega_2)$  - преобразование Фурье от функции  $k_f(x, u)$ . Таким образом,

$$\hat{k}_f(\omega_1, \omega_2) = e^{i\frac{\omega_1^2}{2\omega_2}} \hat{R}f\left(-\frac{\omega_1}{2\omega_2}, \omega_2\right). \quad (2.2.3)$$

Обратив в (2.2.3) преобразование Фурье и найдя функцию  $k_f(x, u)$ , можно вычислить функцию  $f(x, y)$  для  $y > 0$  (напомним, что она четна по переменной  $y$ ):

$$f(x, y) = y k_f(x, x^2 + y^2). \quad (2.2.4)$$

Описанный метод является неустойчивым. Кроме того, в реальных ситуациях можно зарегистрировать лишь конечное число сферических

проекций  $Rf(t, r)$ ,  $t \in T$  ( $T$  - некоторое конечное множество). В связи с этим при реконструкции функции  $f(x, y)$  необходимо использовать методы регуляризации.

На этапе обращения преобразования Фурье заменим функцию  $\hat{k}_f(\omega_1, \omega_2)$  на функцию  $W_\sigma(\omega_1, \omega_2)\hat{k}_f(\omega_1, \omega_2)$ , где множитель  $W_\sigma(\omega_1, \omega_2)$  играет роль регуляризирующего окна. В результате вместо точной функции  $k_f(x, u)$  получается приближенная функция  $k_{f, \sigma}(x, u)$  (и, следовательно, приближенная функция  $f_\sigma(x, y)$ ), но метод реконструкции становится устойчивым к погрешностям. В дальнейшем мы будем использовать регуляризирующее окно вида

$$W_\sigma(\omega_1, \omega_2) = e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2}.$$

Пусть  $F_U$  - класс всех неотрицательных функций  $f(x, y)$  с носителем в единичном круге  $U$ , четных по второй переменной и таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Для регуляризованного метода обращения в классе  $F_U$  можно получить оценку точности реконструкции функции по конечному числу сферических проекций. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.4.** Пусть натуральные числа  $N$  и  $n$  выбираются так, что при  $n \rightarrow \infty$  выполнено  $N/n \rightarrow \infty$  и  $N/n^2 \rightarrow 0$ . Обозначим

$$t_i = \frac{i}{n}, i = -N, \dots, N.$$

Если  $f(x, y), g(x, y) \in F_U$  и сферические проекции функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  совпадают при  $t = t_i$ , т.е.  $Rf(t_i, r) \equiv Rg(t_i, r)$  для всех  $t_i, i = -N, \dots, N$ , тогда

$$\sup_{(x, y) \in U} |f_\sigma(x, y) - g_\sigma(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2} \sigma^3} \left( \frac{N}{n^2} + \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{\pi^2 \sigma^2} \frac{2N}{n}. \quad (2.2.5)$$

Если дополнительно предположить, что функция  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема, тогда

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in U} |f(x, y) - g_\sigma(x, y)| &\leq C_f (\pi/2)^{1/2} \sigma + \\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2} \sigma^3} \left( \frac{N}{n^2} + \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{\pi^2 \sigma^2} \frac{2N}{n}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

где

$$C_f = \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^2} \|\text{grad } f(x, y)\|.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что если  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема, то

$$\sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^2} |f(x, y) - f_\sigma(x, y)| \leq C_f (\pi/2)^{1/2} \sigma,$$

поэтому (2.2.6) следует из (2.2.5).

Докажем (2.2.5). Пусть  $H(t, \omega) = \hat{R}f(t, \omega) - \hat{R}g(t, \omega)$ . Фиксируем  $\omega \neq 0$  и оценим  $|H(t, \omega)|$  при  $|t| \leq N/n$ . Для любых  $t \in [t_i - 1/(2n), t_i + 1/(2n)]$ ,  $i = -N + 1, \dots, N - 1$ , справедливо

$$\begin{aligned} |H(t, \omega)| &= |H(t, \omega) - H(t_i, \omega)| \leq \max_{|t| \leq N/n} |H'_t(t, \omega)| |t - t_i| \leq \\ &\leq \max_{|t| \leq N/n} |H'_t(t, \omega)| / (2n), \end{aligned}$$

где  $H'_t(t, \omega)$  - производная функции  $H(t, \omega)$  по переменной  $t$ . Такую же оценку можно записать для  $t \in [-N/n, -N/n + 1/(2n)]$  и  $t \in [N/n - 1/(2n), N/n]$ .

Далее

$$\begin{aligned} \max_{|t| \leq N/n} |H'_t(t, \omega)| &= \max_{|t| \leq N/n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega r^2} (Rf(t, r) - Rg(t, r)) dr \right|_t = \\ &= \max_{|t| \leq N/n} \left| 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (2i\omega(x-t)) e^{-i\omega((x-t)^2 + y^2)} (f(x, y) - g(x, y)) dx dy \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \max_{|t| \leq N/n} 4|\omega| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x-t|(f(x,y) + g(x,y)) dx dy \leq 8|\omega|(N/n+1).$$

Здесь при переходе к последнему неравенству учтено, что  $f(x,y)$  и  $g(x,y)$  принадлежат классу  $F_U$ .

Таким образом,

$$|H(t, \omega)| \leq 4|\omega|(N/n+1)/n \quad (2.2.7)$$

при  $|t| \leq N/n$ . Это означает, что

$$\left| \hat{k}_f(\omega_1, \omega_2) - \hat{k}_g(\omega_1, \omega_2) \right| \leq 4|\omega_2|(N/n+1)/n$$

при  $|\omega_1/(2\omega_2)| \leq N/n$ .

Далее, учитывая (2.2.4),

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in U} |f_\sigma(x,y) - g_\sigma(x,y)| &= \sup_{(x,y) \in U} \left| yk_{f,\sigma}(x, x^2 + y^2) - yk_{g,\sigma}(x, x^2 + y^2) \right| \leq \\ &\leq \sup_{(x,y) \in U} \left| k_{f,\sigma}(x,y) - k_{g,\sigma}(x,y) \right| = \\ &= \sup_{(x,y) \in U} \left| (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} (\hat{k}_f(\omega_1, \omega_2) - \hat{k}_g(\omega_1, \omega_2)) e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} d\omega_1 d\omega_2 \right| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{k}_f(\omega_1, \omega_2) - \hat{k}_g(\omega_1, \omega_2) \right| e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} d\omega_1 d\omega_2 \right) = \\ &= (2\pi)^{-2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-2|\omega_2|N/n}^{2|\omega_2|N/n} \left| \hat{k}_f(\omega_1, \omega_2) - \hat{k}_g(\omega_1, \omega_2) \right| e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} d\omega_1 + \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{|\omega_1| > 2|\omega_2|N/n} \left| \hat{k}_f(\omega_1, \omega_2) - \hat{k}_g(\omega_1, \omega_2) \right| e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} d\omega_1 \right) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценим отдельно  $I_1$  и  $I_2$ . Имеем

$$\sup_{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbf{R}} \left| \hat{k}_f(\omega_1, \omega_2) - \hat{k}_g(\omega_1, \omega_2) \right| = \sup_{(t, \omega) \in \mathbf{R}} \left| \hat{R}f(t, \omega) - \hat{R}g(t, \omega) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(t + r \cos \theta, r \sin \theta) - g(t + r \cos \theta, r \sin \theta)| r d\theta dr \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dx dy = 2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_2 \leq (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{|\omega_1| > 2|\omega_2|^{N/n}} 2e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} d\omega_1 = \frac{2}{\pi^2 \sigma^2} \frac{2N}{n}. \quad (2.2.8)$$

Далее, учитывая (2.2.7),

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \pi^{-2} \left( \frac{N}{n^2} + \frac{1}{n} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-2|\omega_2|^{N/n}}^{2|\omega_2|^{N/n}} |\omega_2| e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} d\omega_1 \leq \\
&\leq \pi^{-2} \left( \frac{N}{n^2} + \frac{1}{n} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\omega_2| e^{-\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} d\omega_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2} \sigma^3} \left( \frac{N}{n^2} + \frac{1}{n} \right). \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

Объединяя (2.2.8) и (2.2.9), получаем (2.2.5). Теорема доказана.

На практике, в силу наличия шума и неточности измерений, данные регистрируются с некоторой погрешностью, которая еще больше снижает точность реконструкции функции по сферическим проекциям. Если предположить, что уровень погрешности не превосходит  $\varepsilon$ , то можно получить оценку точности реконструкции с учетом этой погрешности. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.5.** Пусть  $t_i$ ,  $i = -N, \dots, N$ , те же, что в предыдущей теореме,  $f(x, y)$ ,  $g(x, y) \in F_U$ , и сферические проекции функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  при  $t = t_i$  отличаются не более чем на  $\varepsilon \in (0, 1)$ , т.е.

$$\sup_{r \in \mathbf{R}} |Rf(t_i, r) - Rg(t_i, r)| \leq \varepsilon$$

для всех  $t_i$ ,  $i = -N, \dots, N$ , тогда

$$\sup_{(x, y) \in U} |f_{\sigma}(x, y) - g_{\sigma}(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi \sigma^2} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2} \sigma^3} \left( \frac{N}{n^2} + \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{\pi^2 \sigma^2} \frac{2N}{n}. \quad (2.2.10)$$

Если дополнительно предположить, что функция  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема, тогда

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in U} |f(x, y) - g_\sigma(x, y)| &\leq C_f (\pi/2)^{1/2} \sigma + \frac{\varepsilon}{\pi \sigma^2} + \\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2} \sigma^3} \left( \frac{N}{n^2} + \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{\pi^2 \sigma^2} \frac{2N}{n}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Доказательство. Если  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема, то так же, как в предыдущей теореме, показывается, что (2.2.11) следует из (2.2.10).

Доказательство оценки (2.2.10) проводится по такой же схеме, что и в теореме 2.4, однако теперь, учитывая тот факт, что  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  принадлежат классу  $F_U$ , имеем

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} |H(t_i, \omega)| \leq 2\varepsilon.$$

Следовательно, при  $|t| \leq N/n$

$$\begin{aligned} |H(t, \omega)| &= |H(t, \omega) - H(t_i, \omega) + H(t_i, \omega)| \leq |H(t, \omega) - H(t_i, \omega)| + 2\varepsilon \leq \\ &\leq 2\varepsilon + \max_{|t| \leq N/n} |H'_t(t, \omega)| |t - t_i| \leq 2\varepsilon + \max_{|t| \leq N/n} |H'_t(t, \omega)| / (2n), \end{aligned}$$

и вместо (2.2.7) при  $|t| \leq N/n$  имеет место неравенство

$$|H(t, \omega)| \leq 2\varepsilon + 4|\omega|(N/n + 1)/n.$$

Далее, рассуждая как в теореме 2.4, получаем (2.2.10). Теорема доказана.

### 3 Разработка устойчивого метода расчета поверхностного натяжения по профилю лежащей капли

Поверхностное натяжение является одним из важнейших свойств жидкости, и его точное измерение является необходимым для изучения различных явлений и разработки технологических процессов. Существует целый ряд способов измерения поверхностного натяжения, однако среди всех них можно выделить метод лежащей или висящей капли. Основные достоинства метода заключаются в очень широкой области применения – от легких текучих жидкостей до жидких металлов, и относительная простота экспериментальной установки по сравнению с другими методами. Причем, в связи с развитием цифровой вычислительной и фототехники стало возможным производить анализ практически мгновенно.

Суть метода состоит в следующем: капля помещается на горизонтальную подложку (метод лежащей капли) или подвешивается на капиллярной трубке (метод висящей капли) и затем изучается ее фотография в профиль (см. рис. 3.1). Измерение геометрических параметров равновесной капли, форма которой определяется соотношением плотности и поверхностного натяжения жидкости, позволяет восстановить искомое поверхностное натяжение.

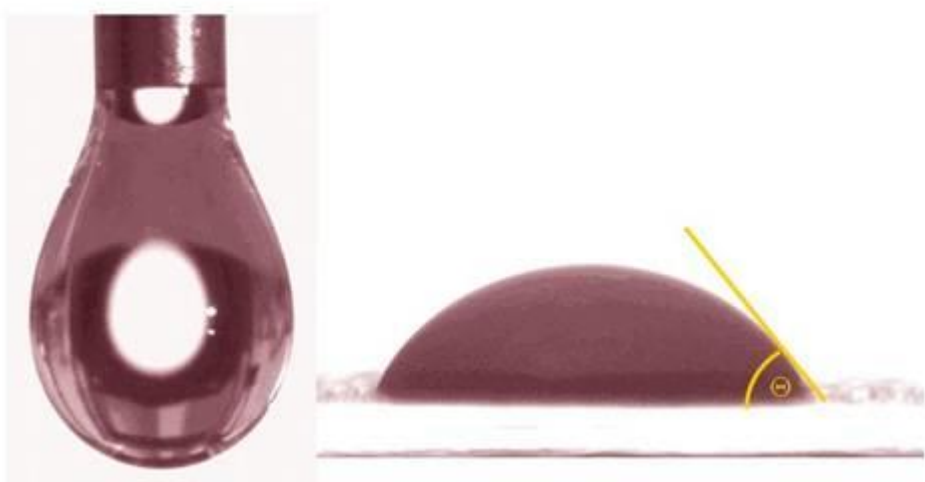


Рисунок 3.1 – Схема методов висящей (слева) и лежащей (справа) капли.



Несмотря на достаточно хорошо разработанную экспериментальную методику, до сих пор требуется специальная дорогостоящая установка для съемки капли. В рамках данной НИР предполагается использовать простую установку, сконструированную из широкодоступных компонентов. Недостатки установки по сравнению со специализированным лабораторным оборудованием предполагается компенсировать с помощью разрабатываемых методов обработки изображений.

В связи с этим возникают следующие задачи обработки изображений: автоматическое получение контура капли  $\{x_i, y_i\}$ , что осложняется наличием пыли и мусора на снимках (что связано с применением обычной камеры в «бытовых» условиях), а также сложными условиями съемки, недостаточности освещения, что приводит к появлению на снимках стохастического шума, связанного с цифровым сенсором.

### ***3.1 Метод лежащей капли***

Основное уравнение метода лежащей капли – уравнение Юнга-Лапласа, описывает поверхность капли с симметрией вращения на горизонтальной подложке.

$$\gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \Delta P, \quad (3.1)$$

Основа метода была заложена еще в ранней работе Башфорта и Адамса, посвященной решению прямой задачи для лежащей капли [23]. В их работе были получены решения прямой задачи для различных значений параметров и составлены соответствующие таблицы. Пользуясь такой таблицей можно было по экспериментально измеренному профилю капли с помощью интерполяции найти приближенные значения параметров. Метод активно развивался, был применен для висящих капель [24-28], и, наконец, была осуществлена программная реализация [29]. Однако по-прежнему измерение проводилось с помощью выбора некоторых заранее выбранных особых точек на профиле капли, которые необходимо измерять особо точно,

так как небольшие ошибки в их измерении сильно влияют на результат. Кроме того, возможности метода ограничивались наличием таблиц только для определенного диапазона параметров.

Для решения этой проблемы в статье [30] был разработан новый алгоритм. На измеренном профиле капли (на одной из симметричных половин) выбирались несколько произвольных и равноправных с точки зрения алгоритма точек, после чего 2 параметра (радиус кривизны в апексе капли и капиллярная постоянная) подбирались так, чтобы наилучшим образом приблизить выбранные точки. Для начала расчета необходимо выбрать хорошее начальное приближение, например, из таблиц Башфорта и Адамса, в противном случае алгоритм не сойдется.

Несмотря на прогресс в стратегии определения параметров, данный алгоритм также имел ряд существенных недостатков. Функция ошибки, то есть «разность» между теоретическим и экспериментальным профилем, рассчитывалась только по горизонтальным расстояниям между теоретическим и экспериментальным профилями. Данный способ не подходит для лежащих капель, так как их форма в основном определяется гравитацией. Например, при низком поверхностном натяжении большие капли становятся плоскими в окрестности апекса, поэтому точка в окрестности апекса может привести к существенной ошибке, даже если она находится близко к кривой наилучшего приближения. Кроме того, для работы алгоритма было чрезвычайно важно точное задание точки апекса, так как она служит точкой отсчета для рассчитываемых кривых. В работе [31] был предложен похожий подход, только была использована грубая аппроксимация расстояния по нормали [32], а апекс капли также должен быть известен заранее.

В статье [33] для улучшения устойчивости метода была использован устойчивый метод сравнения форм [34]. Для устранения ошибочных точек, сильно влияющих на результат – так называемых «выбросов», вместо сравнения точек на двух кривых, сравнивались сегменты

экспериментального профиля с соответствующими сегментами теоретического профиля. Однако, результат зависел не только от точности определения профиля капли, но и от выбора начала отсчета, например, апекса или центра капли.

Ротенбергом в работе [35] был создан более мощный метод, Axisymmetric Drop Shape Analysis (ADSA), в котором измеренный профиль аппроксимируется профилем Лапласа с помощью нелинейной оптимизации. В методе ADSA целевой функцией является сумма квадратов нормальных расстояний между теоретической кривой и экспериментальными точками. Кроме того, положение точки апекса капли считается неизвестным, и ее координаты также являются параметрами целевой функции. Таким образом, измерения можно проводить на любом удобном кадре. Оптимизация параметров производилась с помощью метода Ньютона. Численная процедура унифицирована для лежащих и висящих капель, не требует таблиц.

Простота и точность метода были улучшены в [36], где было предложено автоматизированное определение контура капли с помощью методов обработки изображений. В результате это еще больше увеличило точность метода. Оценка точности [37] показала, что первое поколение метода ADSA хорошо работает за исключением случаев очень больших и плоских капель. Также, было определено, что достаточно трудно достичь идеального выравнивания камеры по горизонтали, поэтому требуется ручное выравнивание по отвесам на экране компьютера с помощью мыши.

Наконец, в работе del Río [38] создано второе поколение метода ADSA, в котором практически решены все трудности, обнаруженные в первом поколении. Для улучшения устойчивости алгоритма к шуму (неточностям профиля), вместо радиуса кривизны в точке апекса капли использована непосредственно кривизна, а также добавлен параметр угла наклона камеры в процедуру оптимизации. Кроме того, он также предложил совершенно другой подход, названный Axisymmetric Liquid–Fluid Interface (ALFI),

который работает в противоположном ключе по сравнению с ADSA. В методе ALFI генерируются теоретические кривые Лапласа для известных параметров кривизны и поверхностного натяжения и сравниваются с измеренной. Фактически, производится автоматизация метода Башфорта и Адамса [23].

Для того чтобы проинтегрировать уравнение Юнга-Лапласа вводится параметризация кривой  $\{x(t), y(t)\}$ , где  $t$  – длина дуги кривой от вершины капли (рис. 3.2).

Эта параметризация удовлетворяет условию  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ , и приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\dot{x} \left[ -\frac{y - y_0}{\alpha^2} + \frac{\dot{y}}{x - x_0} + \frac{2}{R_0} \right]; \\ \ddot{x} &= \dot{y} \left[ -\frac{y - y_0}{\alpha^2} + \frac{\dot{y}}{x - x_0} + \frac{2}{R_0} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

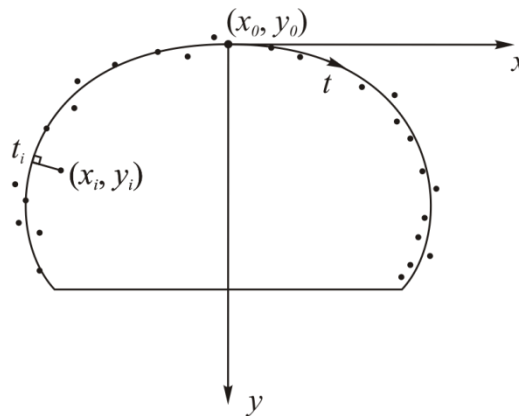


Рисунок 3.2 – Параметризация контура капли.

с начальными условиями  $y(0) = y_0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  и дополнительным условием  $\dot{y}/x|_{t=0} = -1/R_0$ . Данная система уравнений является нелинейной, поэтому для её решения необходимо использовать численные методы. В данном случае целесообразно применение методов типа Рунге-Кутты, например [39].

Для восстановления параметров лежащей капли необходимо решить обратную задачу определения капиллярной постоянной  $\alpha^2$ , координат апекса капли  $\{x_0, y_0\}$  и ее радиуса кривизны  $R_0$  по функции радиуса горизонтального сечения капли от высоты над подложкой. Эта функция измерена с ошибкой и, в ряде случаев, доступны измерения только части контура капли. При решении данной обратной задачи минимизируется ошибка

$$E = \sum d(\{x_i, y_i\}, \{x(t), y(t)\}), \quad (3.3)$$

где  $d(\{x_i, y_i\}, \{x(t), y(t)\})$  - это расстояние между экспериментальными точками  $\{x_i, y_i\}$  и кривой  $\{x(t), y(t)\}$ , полученной в результате численного решения задачи (3.2) (см. Рис. 3.2).

Таким образом, нам необходимо вычислить расстояние между экспериментальными точками и решением задачи (3.2). В общем случае система (3.2) не может быть решена в элементарных функциях, поэтому решение находится численно. Следовательно, расстояние

$$d(\{x_i, y_i\}, \{x(t), y(t)\})^2 = \min_{t_i} (x_i - x(t_i))^2 + (y_i - y(t_i))^2 \quad (3.4)$$

необходимо вычислить с помощью процедуры минимизации. С целью повышения вычислительной эффективности, расчет проводится следующим образом.

Ошибка аппроксимации вычисляется одновременно вместе с интегрированием системы (3.2). Экспериментальные точки  $\{x_i, y_i\}$  сортируются алгоритмом обработки изображения в порядке увеличения соответствующего точке значения параметра длины дуги  $t_i$ . Поэтому, в процессе интегрирования значение параметра  $t_i$  предыдущей точки может быть использовано в качестве начального приближения для поиска значения параметра  $t_{i+1}$ .

В процессе интегрирования системы (3.2) методом Принса-Дорманда [39] на каждом шаге доступны значения  $\{x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)\}$  поэтому значение  $t_i$  может быть определено из условия

$$(x_i - x(t))\dot{x} + (y_i - y(t))\dot{y} = 0 \quad (3.5)$$

с помощью метода Ньютона. Необходимо только отслеживать значение левой части (3.5) в процессе интегрирования.

### 3.1.1 Оценка точности метода

Для оценки точности разработанного метода были проведён вычислительный эксперимент. Для эксперимента были сгенерированы теоретические профили капель с параметром (радиус кривизны в апексе)  $1/b = R_0 = 2.4$ , и различными значениями капиллярной постоянной  $c = 3.7$  и  $c = 1$ . Эффективность метода оценивалась при различных уровнях общей погрешности измерения  $\delta$ :

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^N \rho^2(X_i, \tilde{X}_i),$$

где  $X_i$  - координаты точек теоретического профиля капли,  $\tilde{X}_i$  - координаты возмущенного профиля капли,  $\rho$  - это расстояние по нормали между точками и теоретическим профилем капли (3.4). Для эксперимента было взято 100 точек. Возмущенные значения  $\tilde{X}_i$  были получены путем добавления равномерно распределенного шума к точкам  $X_i$ . В таблице 1 приведены усредненные результаты по 20 запускам для каждого уровня шума.

Значения  $c_{\min}$  и  $c_{\max}$  обозначают минимальное и максимальное значения восстановленной капиллярной постоянной  $c$  для каждого значения уровня шума  $\delta^2$ , а также в таблице приведены относительные ошибки определения капиллярной постоянной  $c$ :

$$\Delta_{\text{rel}} = \frac{\max\{|c_{\max} - c|, |c_{\min} - c|\}}{c}.$$

Таблица 1 – Оценка точности определения капиллярной постоянной методом Лапласа.

$R_0 = 2.4$						
	$c = 3.7$			$c = 1$		
$\delta$	$c_{\min}$	$c_{\max}$	$\Delta_{\text{rel}}$	$c_{\min}$	$c_{\max}$	$\Delta_{\text{rel}}$
0	3.7190	3.7190	0.0190	0.9993	0.9993	0.0007
0.01	3.6625	3.7779	0.0211	0.9954	1.0029	0.0046
0.02	3.6091	3.7933	0.0252	0.9922	1.0073	0.0078
0.03	3.5664	3.8416	0.0383	0.9883	1.0110	0.0117
0.04	3.5239	3.8899	0.0513	0.9845	1.0147	0.0155
0.05	3.4823	3.9399	0.0648	0.9807	1.0184	0.0193
0.06	3.4417	3.9910	0.0787	0.9769	1.0222	0.0231
0.1	3.2847	4.2147	0.1391	0.9620	1.0375	0.0380

Примеры рассчитанных параметров капли и соответствующие им профили приведены на рис. 3.3, 3.4. Зашумленные значения экспериментальных точек  $\tilde{X}_i$  обозначены маленькими кружочками, а восстановленный профиль капли изображен сплошной линией. В обоих случаях уровень шума составляет  $\delta^2 = 0.1$ . Точное решение не приводится, так как визуально практически совпадает с восстановленным решением.

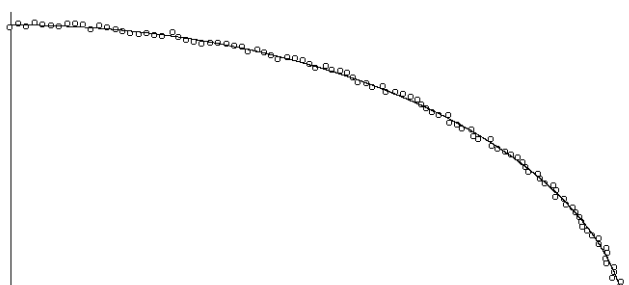


Рисунок 3.3 – Восстановленный профиль капли для значений параметров  $R_0 = 2.4, c = 3.7, \delta^2 = 0.1$ .

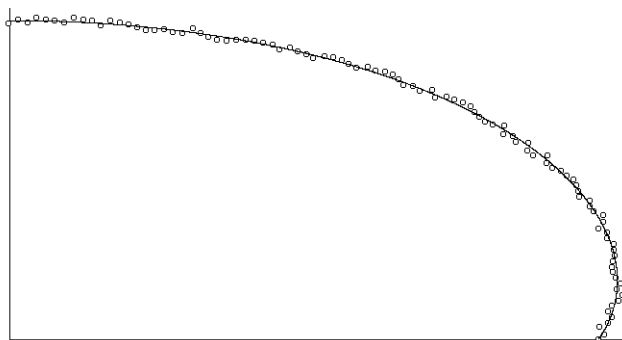


Рисунок 3.4 – Восстановленный профиль капли для значений параметров  $R_0 = 2.4$ ,  $c = 1$ ,  $\delta^2 = 0.1$ .

### 3.1.2 Экспериментальные установки

Для оценки эффективности алгоритма в реальных условиях, были созданы 2 экспериментальные установки.

1. Гониометр LK-1 компании «Открытая наука», состоящий, фактически, из горизонтального микроскопа, оснащенного объективом 4x/0.10, USB ПЗС камеры с разрешением 1280x1024 и механическими салазками для позиционирования исследуемого образца. Исследуемая капля жидкости помещается вручную с помощью шприца на выбранную подложку, затем капля позиционируется на оптической оси микроскопа и камера фокусируется на капле. Отдельные изображения или серии захватываются с помощью камеры на компьютер для дальнейшей обработки и измерения.

2. Создана специальная установка для изучения быстро растекающихся расплавов галогенидов щелочных металлов с низкой вязкостью на керамической подложке в воздушной среде. Подложка располагается внутри трубчатой печи и нагревается до требуемой температуры. Вещество, подлежащее расплавлению, помещается в корундовый тигель, который находится над подложкой. Когда достигается температура эксперимента, расплав экструдирован из тигля на подложку через капилляр, изготовленный из гексагонального нитрида бора. Процесс растекания регистрируется серией изображений специальной скоростной камерой FastVideo 400 (400 кадров/с при разрешении 640x480) и сохраняются на компьютер.



## 3.2 *Обработка изображений капли*

### 3.2.1 **Выделение контура капли**

После получения изображения капли с помощью микроскопа и цифровой камеры, необходимо автоматически выделить контур капли. В литературе [36, 37] для этого используется метод Собеля, который заключается в дискретной свертке изображения с масками размером 3x3:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Фактически, оператор Собеля представляет собой разностную производную с усреднением по 3 соседним строкам или столбцам, в зависимости от направления. Пиксели, в которых такой аппроксимированный модуль градиента выше некоторого порога, считаются пикселями края.

Данный подход имеет несколько недостатков: во-первых, при наличии посторонних объектов в кадре на границах их контуров также будут найдены точки края, и необходимо отделить их от контура капли. Обычно, это делает оператор, выделяя вручную область, где находится капля. Во-вторых, простое пороговое ограничение работает удовлетворительно только при хорошо контролируемых условиях съемки (освещение и др.), что в ряде случаев невозможно в силу условий (высокие температура/давление, съемки в растворах и др.). В других случаях наблюдаются следующие проблемы:

- контур капли выделяется не полностью, так как имеет разный контраст на своем протяжении, например, в результате нахождения одной части капли в тени. При этом простое понижение порога невозможно, так как приведет к выделению большого количества шумовых контуров;
- контур может быть размыт, при этом пороговое ограничение дает линию шириной в несколько пикселей, что существенно снижает

точностью метода. Понижение порога опять приводит к нежелательным последствиям, как правило, часть контура пропадает. Для решения этих проблем будет рассмотрено применение метода Канни [40] для обнаружения контура капли, а также автоматизированный алгоритм выбора контура только капли из всего набора обнаруженных контуров.

### **Метод Канни**

Как показано в работе [38], наиболее устойчивый метод выделения контура капли – алгоритм Канни [40]. Тем не менее, в сложных условиях освещения даже метод Канни выделяет ложные контуры вследствие сложных условий освещения, наличии шума на изображении и присутствии на изображении посторонних объектов.

Для автоматизации процесса выделения контура капли в таких условиях, используется следующая процедура. Производится построение бинарной карты краев с помощью детектора краев, и производится разбор этой карты на списки связанных точек с помощью алгоритма прослеживания линий [41], основанного на анализе окрестности пикселя. Эта стадия также важна для эффективного вычисления функции ошибки (3.3). После векторизации карты краев, обычно контур, соответствующий капле является самым длинным, и поэтому легко определяется автоматически. В редких случаях, когда данное правило не срабатывает, контуры на изображении могут быть отредактированы вручную путем удаления лишних контуров и объединения разорванных частей контура капли.

Для уточнения контура используется алгоритм субпиксельного уточнения краев на основе квадратичной интерполяции [42].

### **3.2.2 Калибровка камеры**

Калибровка камеры является важнейшей частью метода лежащей капли, так как именно наличие точного соответствия между пикселями кадра и реальными размерами капли позволяет производить измерение поверхностного натяжения.

В самом упрощенном виде калибровку камеры можно представить следующим образом. Установка для съемки капли приводится в рабочее состояние, и на место, где расположена капля, на том же удалении от камеры необходимо поместить некоторый объект с известными заранее размерами. Здесь важно отметить, что форма объекта должна быть удобной для автоматической обработки, чтобы исключить ручной ввод данных. Ручной ввод, как правило, вносит связанную с оператором систематическую ошибку в эксперимент.

В данной работе в качестве удобных для практического применения были выбраны два варианта: калибровка по прецизионному шарикю и калибровка по объект-микрометру. Оба типа калибровочных объектов имеют точность геометрических размеров, превышающую разрешающую способность большинства камер, применимых для съемки капель, поэтому могут быть эффективно применены для калибровки камеры.

Общая схема алгоритма расчета калибровки по изображению калибровочного объекта выглядит следующим образом (см. рис. 3.5).

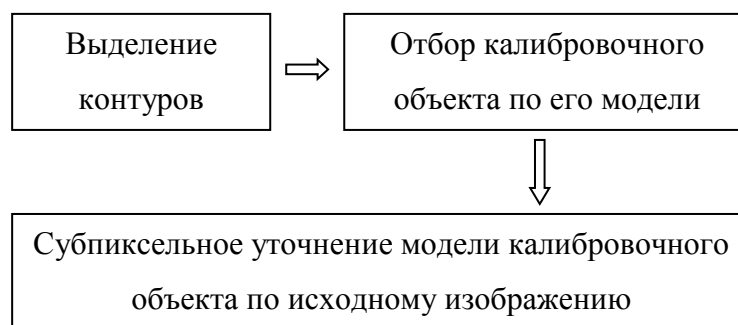


Рисунок 3.5 – Блок-схема алгоритма калибровки камеры.

Выделение контуров в данном случае проводится аналогично выделению контура капли, как описано в разделе 3.2.1, однако, затем алгоритм действует совершенно по-другому. В силу относительной простоты форму калибровочного объекта, становится возможным его быстрое автоматическое выделение без участия оператора, что и проводится на второй стадии алгоритма калибровки. В результате мы получаем хорошее

начальное приближение положения калибровочного объекта для третьей стадии алгоритма.

Субпиксельное уточнение контура на данном этапе не требуется, так как на последнем этапе алгоритма калибровки производится непосредственная оптимизация наложения модели калибровочного объекта на исходное изображение. Данная процедура позволяет получить максимально возможную точность калибровки.

Второй и третий этапы алгоритма калибровки существенно зависят от формы калибровочного объекта, поэтому рассмотрим их по отдельности.

### 3.2.2.1 Калибровка камеры по прецизионному шарик

Прецизионный шарик является отличным инструментом для калибровки масштаба в случае лежащей капли, так как может быть помещен непосредственно в то же место, что и капля, и при этом не требует специального позиционирования в силу симметрии. Кроме того, модель шарика на изображении описывается всего тремя параметрами: координаты центра  $(x_0, y_0)$  и радиус  $R$ . Однако, в случае измерения висячих капель, а также пузырьков в дисперсных системах, шарик необходимо каким-либо образом закреплять в зоне съемки, что может быть затруднительным в ряде случаев. Пример снимка калибровочного шарика приведен на рис. 3.6.

#### Выбор контура шарика

После операции детектирования контуров на изображении мы имеем набор контуров  $X_k = \{(x_0^k, y_0^k), (x_1^k, y_1^k), \dots, (x_{N_k}^k, y_{N_k}^k)\}, k = \overline{1, K}$ .

Для каждого контура  $X_k$  необходимо найти его наилучшее приближение окружностью:

$$(x_k, y_k, R_k) = \arg \min_{(x_k, y_k, R_k)} \sum_{i=1}^{N_k} \left( R - \sqrt{(x_i^k - x_k)^2 + (y_i^k - y_k)^2} \right)^2.$$

Отбросив контуры, состоящие из малого количества точек, выберем контур наилучшим образом описываемый окружностью, он и будет соответствовать калибровочному шару.

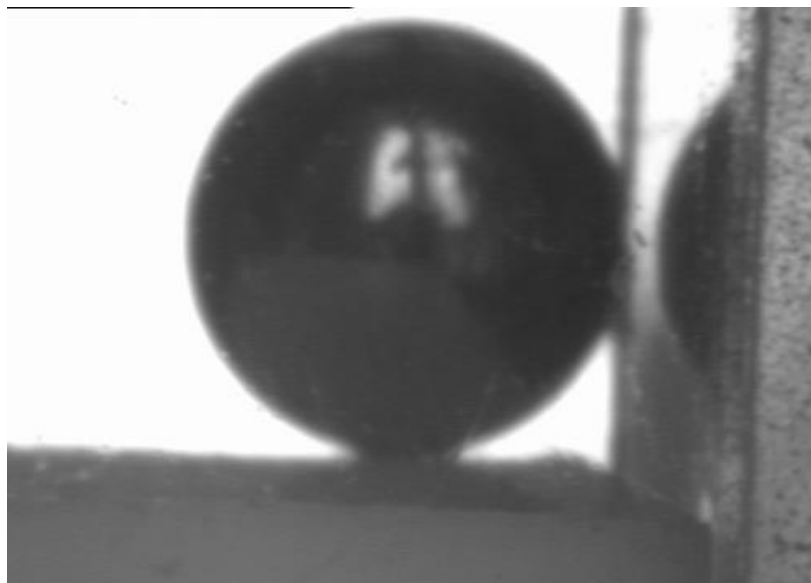


Рисунок 3.6 – Снимок калибровочного шарика, диаметр 3 мм.

Таким образом, поскольку ошибка определения всех контуров  $X_k$  одинакова, наилучшим будет контур с наименьшей средней ошибкой

аппроксимации 
$$\tilde{X}_k = \arg \min_{X_k} \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \left( R - \sqrt{(x_i^k - x_k)^2 + (y_i^k - y_k)^2} \right)^2$$
. Определив

приблизительные координаты шарика, можно использовать  $\tilde{X}_k$  в качестве начального приближения для субпиксельного совмещения модели шарика с изображением.

### 3.2.2.2 Субпиксельное совмещения модели объекта с изображением

Поскольку на исходном изображении  $I(x, y)$  внутренняя часть калибровочного объекта может иметь различную интенсивность из-за различных условий освещения, а также с целью вычислительной оптимизации, при совмещении модели с изображением наиболее эффективно рассматривать только граничную область калибровочного объекта.

Перейдем от изображения  $I(x, y)$  к его градиенту

$$G(x, y) = \left[ \frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right].$$

Очевидно, что модуль градиента максимален на границе «калибровочный объект – фон», поэтому для субпиксельной локализации модели будем максимизировать величину модуля градиента под контуром теоретической модели. Для исключения влияния объектов, перекрывающихся с калибровочным объектом (посторонние предметы, волоски и прочее), будем учитывать только нормальную к контуру составляющую градиента.

$$F = \oint \left[ \frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right] \cdot \vec{n}(x, y) dt \rightarrow \max. \quad (3.6)$$

В случае уравнения окружности

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos t, \\ y(t) = y_0 + R \sin t, \end{cases} \quad t = [0, 2\pi], \quad (3.7)$$

и соответствующая нормаль

$$\vec{n}(x(t), y(t)) = (-\sin t, \cos t). \quad (3.8)$$

Интегрирование в формуле (3.6) производится с дискретизацией в каждом пикселе, через который проходит контур модели. При интегрировании естественным образом учитывается удаленность пикселя изображения от теоретического контура: значение в пикселе берется с весом соответствующим удалению центра пикселя от контура.

### 3.2.2.3 Калибровка камеры по объект-микрометру

В ряде случаев, калибровка по объект-микрометру удобнее калибровки по шарикю. Объект-микрометр представляет собой нанесенный на прозрачный носитель прямоугольник с микрометрической линейкой вдоль длинных сторон (см. рис. 3.7)



Рисунок 3.7 – Пример фотографии объект-микрометра.

Как правило, объект-микрометр несложно закрепить в нужном месте в широком диапазоне условий, как для висячих капель, так и в дисперсных системах.

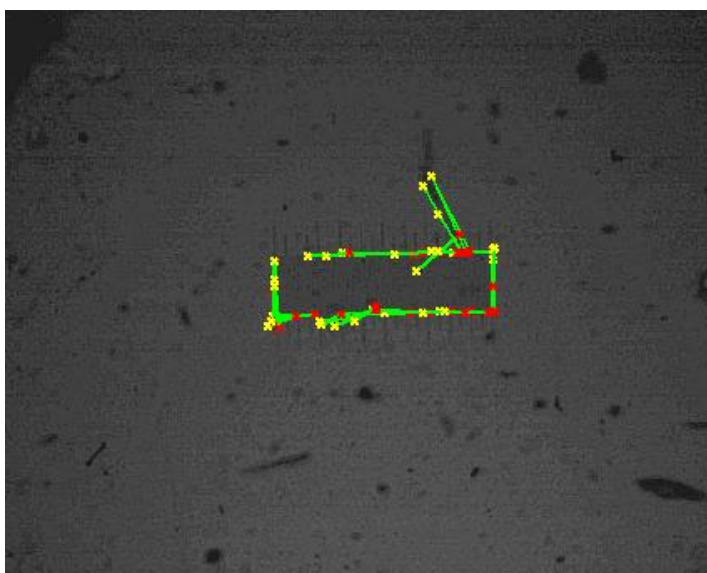


Рисунок 3.8 – Выделенные отрезки прямых линий на изображении объект-микрометра.

С точки зрения первичного детектирования, прямоугольник является более сложным объектом, чем окружность, так как его модель описывается 5 параметрами: координаты центра, длины 2 сторон и угол наклона относительно оси  $x$  ( $x_0, y_0, a, b, \theta$ ). Однако, прямоугольник можно представить в виде 4 линий – существенно более простых примитивов, описываемых 2 параметрами каждая.

Задача детектирование прямых линий эффективно решается с помощью преобразования Хафа [44]. Результат работы преобразования Хафа представлен на рис. 3.8.

После детектирования отрезков прямых линий с помощью преобразования Хафа, остается отфильтровать отрезки, для которых нет перпендикулярных им отрезков (то есть, они не могут принадлежать прямоугольнику), после чего, по оставшимся отрезкам определить параметры прямоугольника  $(x_0, y_0, a, b, \theta)$ . Как и в случае с калибровочным шариком, данное грубое приближение не обеспечивает достаточной точности, и требуется субпиксельное совмещение модели прямоугольника непосредственно с исходным изображением. Процедура совмещения аналогична пункту 3.2.2.2, за исключением формул (3.7)-(3.8), вместо них используется модель прямоугольника:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 - a/2 + at \cos \theta, t = [0,1], \\ y(t) = y_0 - b/2 + at \sin \theta, t = [0,1], \\ x(t) = x_0 + a/2 - b(t-1) \sin \theta, t = [1,2], \\ y(t) = y_0 - b/2 + b(t-1) \cos \theta, t = [1,2], \\ x(t) = x_0 + a/2 - a(t-2) \cos \theta, t = [2,3], \\ y(t) = y_0 + b/2 - a(t-2) \sin \theta, t = [2,3], \\ x(t) = x_0 - a/2 - bt \cos \theta, t = [3,4], \\ y(t) = y_0 + b/2 + bt \sin \theta, t = [3,4]. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

### 3.3 Измерение межфазного натяжения и контактного угла

Измерение поверхностного натяжения было протестировано в приложении к стационарным и квази-стационарным каплям.

#### 3.3.1 Измерение межфазного натяжения для квази-стационарных капель в системе водный раствор лизоцима / октан

Разработанный алгоритм был применен для измерения межфазного натяжения между водным раствором лизоцима ( $10^{-4}$ М) и октаном. Политетрафторэтиленовая (ПТФЭ) подложка была помещена на дно кюветы



из оптического стекла. Затем, кювета была заполнена октаном и помещена на салазки гониометра ЛК-1.

Капля водного раствора лизоцима была помещена на ПТФЭ подложку с помощью пробоотборника (рис. 3.9).

Серия снимков капли записывалась в течение 400 секунд, и затем был произведен анализ межфазного натяжения (рис. 3.10). В течение первых ~50 секунд, наблюдалось резкое падение межфазного натяжения до

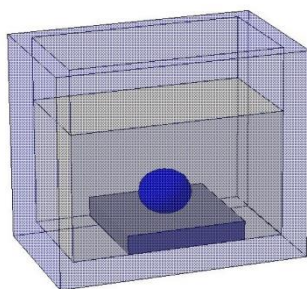


Рисунок 3.9 – Капля воды на ПТФЭ подложке, погруженная в октан.

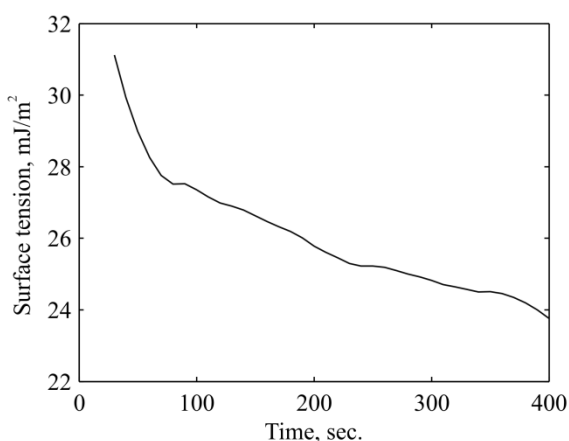


Рисунок 3.10 – Межфазное натяжение системы октан/водный раствор лизоцима в зависимости от времени.

приблизительно 28 мН/м<sup>2</sup>. Последующее плавное снижение натяжения с 28 до 24 мН/м<sup>2</sup> в течение последующих 350 секунд может быть объяснено перераспределением молекул белка в межфазном слое.

### 3.3.2 Измерение динамического контактного угла для быстро растекающихся капель (система жидкий NaCl / гидроксиапатит (НАР))

Расплавы с низкой вязкостью растекаются по подложке из смачиваемого материала очень быстро (для капель миллиметрового размера можно наблюдать скорость тройной линии достигающей 1 м/с [43]). Для изучения подробностей процесса растекания необходимо использовать высокоскоростные камеры. Хотя профиль капли не удовлетворяет уравнению Юнга-Лапласа при таких высоких скоростях растекания, очень важно иметь возможность зарегистрировать динамический контактный угол  $\theta(t)$  локально около тройной линии. Это позволяет оценить величину силы, вызывающую растекание (на единицу длины тройной линии):

$$F = \sigma_{lg} (\cos\theta(t) - \cos\theta_{eq}).$$

Таким образом, необходимо измерить контактный угол другим способом.

В большинстве случаев, профиль капли остается достаточно гладким даже в случае быстрого растекания капли. Более того, когда контактный угол мал, вблизи тройной линии форма капли становится близка к сфере. Учитывая эти факты, для определения динамического контактного угла предлагается использовать следующий алгоритм.

Сначала, профиль капли выделяется на изображении, используя ту же самую процедуру, что и для статических и квази-статических капель, то есть методом Канни с субпиксельной точностью. Необходимо отметить, что субпиксельная точность необходима для данной задачи, поскольку к концу процесса растекания контактный угол может стать маленьким (менее 5 градусов). Затем, определяются левая и правая тройная линия с помощью процедуры вычитания кадров (необходимо определить до какого места успела растечься капля).

Наконец, угол вычисляется с помощью итерационной процедуры. Поскольку вблизи тройной линии каплю можно считать сферической, две части с краев профиля капли приближаются сегментом окружности. Для

начала, с краев берётся 5% ширины капли (см. рис. 3.11), и этот процент итеративно увеличивается пока сферическое приближение адекватно описывает профиль, то есть средняя ошибка аппроксимации не превышает 0,1 пикселя (что соответствует точности используемого алгоритма нахождения контуров, в соответствии с данными [42])

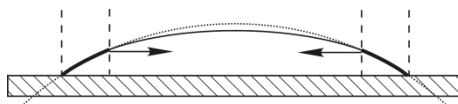


Рисунок 3.11 – Схема определения динамического контактного угла.

На рис. 3.12 приведен пример аппроксимации контура окружностью для капли расплава NaCl, растекающейся по гидроксипатиту при 866°C. Измеренный контактный угол приведен на рис. 3.13.

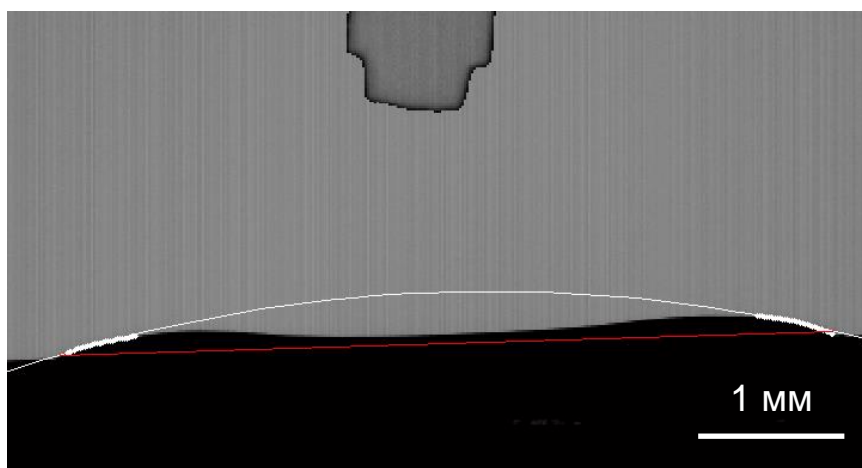


Рисунок 3.12 – Измерение контактного угла растекающейся капли расплава NaCl.

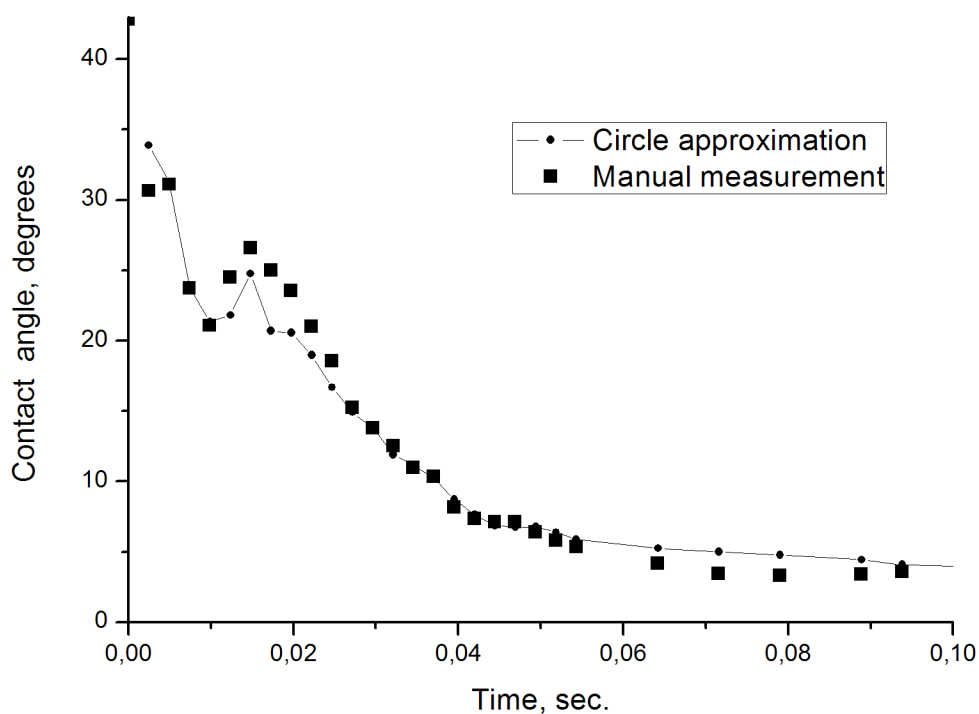


Рисунок 3.13 – Зависимость контактного угла капли расплава NaCl распространяющегося по подложке из гидроксиапатита. Квадратиками отмечены измерения угла вручную, линией – предложенный метод.

### 3.4 Программный пакет

Разработан программный пакет для обеспечения измерений поверхностного натяжения и контактного угла в широком диапазоне условий с высокой степенью автоматизации.

Разработанный программный пакет включает в себя универсальный модуль захвата, работающий с любым аппаратным обеспечением, поддерживающим стандарт DirectShow. Это позволяет использовать недорогие широкодоступные цифровые камеры с различным разрешением; настройка аппаратного обеспечения производится с помощью специальной процедуры калибровки.

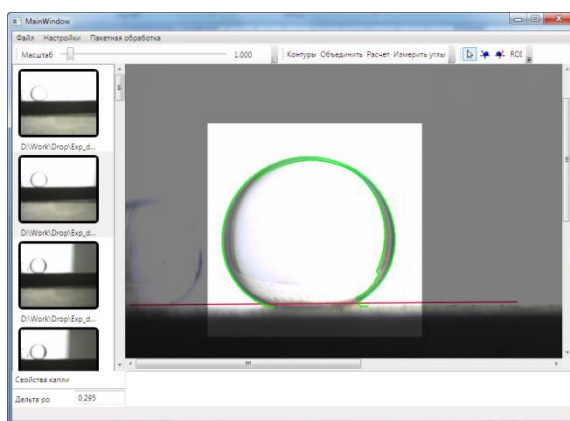


Рисунок 3.14 – Пример обработки серии снимков разработанным программным комплексом.

Разработанная программа поддерживает автоматизированный захват серии капель для изучения систем с изменяющимися параметрами, как показано на рис. 3.14. Для случаев быстро меняющихся систем, где уравнение Юнга-Лапласа не применимо, может быть использован специальный автоматический метод измерения контактных углов.

## 4 Заключение

На втором этапе были получены следующие результаты:

- Создан и теоретически обоснован метод восстановления вероятностных характеристик случайных функций по вероятностным характеристикам сферических преобразований Радона.
- Разработан устойчивый метод реконструкции стохастических радиолокационных, термо- и опто-акустических томографических изображений.
- Создан устойчивый метод расчета поверхностного натяжения по профилю лежащей капли.

В работе рассмотрено сферическое преобразование Радона, которое возникает в различных приложениях, включая термоакустическую томографию, оптоакустическую томографию, обработку сигналов, получаемых радарами и сонарами, и т.п. Разработан метод восстановления распределений случайной функции по распределению ее сферических проекций. Построен регуляризованный метод восстановления стохастических радиолокационных изображений по конечному числу проекций. Регуляризация проведена с помощью введения весового окна в преобразование Гильберта. Получены оценки погрешности при реконструкции радиолокационных изображений.

Разработаны методы определения межфазного и поверхностного натяжения, а также динамического контактного угла с высокой степенью автоматизации. Использование современных алгоритмов обработки изображений производить измерения различного качества, например, полученные при высоких температурах и давлениях, в дисперсных системах и других сложных условиях съемки. Разработанный алгоритм позволяет использовать широкодоступные недорогие камеры для проведения измерений поверхностного натяжения и динамического контактного угла.

Созданы специальные методы калибровки масштаба камер по изображениям объектов известной формы с высоким уровнем стохастического шума.

Проведенные численные и практические эксперименты показали высокую надежность и хорошую точность разработанных методов.

## Список использованных источников

1. G. Ambartsoumian and P. Kuchment, On the injectivity of the circular Radon transform arising in thermoacoustic tomography//Inverse Problems, 21, 2005, p. 473–485.
2. D. Finch, Rakesh, and S. Patch, Determining a function from its mean values over a family of spheres//SIAM J. Math. Anal. 35, 2004, N. 5, p. 1213–1240.
3. A. K. Louis and E. T. Quinto, Local tomographic methods in Sonar//Surveys on solution methods for inverse problems, Springer, Vienna, 2000, p. 147-154.
4. M. L. Agranovsky, E. T. Quinto, Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions//J. Funct. Anal., 139, 1996, p. 383–413.
5. Liu W., Frank J. Estimation of variance distribution in three-dimensional reconstruction. I. Theory//J. Opt. Soc. Am. A, 1995, 12, p. 2615-2627.
6. Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Восстановление вероятностных характеристик многомерных случайных функций по проекциям//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2001. № 4. С. 32-39.
7. Shestakov O. V. An algorithm to reconstruct probabilistic distributions of multivariate random functions from the distributions of their projections//Journal Of Mathematical Sciences. 2002, vol. 112, № 2, p. 4198-4204.
8. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. - М.-Л. 1949.
9. S. J. Norton, Reconstruction of a two-dimensional reflecting medium over a circular domain: Exact solution//J. Acoust. Soc. Amer. 67, 1980, 1266–1273.
10. L. Kunyansky, Explicit inversion formulas for the spherical mean Radon transform//Inverse Problems, 23, 2007, P. 373-383.
11. Finch D, Haltmeier M and Rakesh. Inversion of spherical means and the wave equation in even dimensions // SIAM. J. Appl. Math., 68, 2007, N. 2, p. 392-412.



12. Soumekh M. Synthetic Aperture Radar Signal Processing with MATLAB Applications. John Wiley & Sons, 1999.
13. Andersson L.-E. On the determination of a function from spherical averages // SIAM J. Math. Anal. 1988. **19**. N 1. P. 214-232.
14. Hellsten H. Inverse scattering analysis of diffraction limited SAR // IEEE. Trans. Ant. Prop. 1990. **38**. N 10. P. 1517-1522.
15. Шестаков О. В. О единственности восстановления вероятностных характеристик многомерных случайных функций по вероятностным характеристикам их проекций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2003. № 3. С. 37-41.
16. Wang X. D., Pang G., Ku Y. J., Xie X. Y., Stoica G., Wang L.-H. V. Noninvasive laser-induced photoacoustic tomography for structural and functional in vivo imaging of the brain // Nature Biotechnology. 2003. **21**. P. 803-806.
17. Kruger R. A., Miller K. D., Reynolds H. E., Kiser W. L., Reinecke D. R., Kruger G. A. Breast cancer in vivo: contrast enhancement with thermoacoustic ct at 434 mhz-feasibility study // Radiology. 2000. **216**. P. 279-283.
18. Khalfin L. A., Klebanov L. B. A solution of the computer tomography paradox and estimating the distances between the densities of measures with the same marginals // The Annals of Probability. 1994. **22**. N 4. P. 2235-2241.
19. Шестаков О. В., Савенков Т. Ю. Оценка расстояния между плотностями вероятностных мер, имеющих близкие проекции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2001. № 4. С. 44-46.
20. Хелгасон С. Преобразование Радона. - М.: Мир, 1983.
21. Redding N. J., Newsam G. N. Inverting the circular radon transform // DSTO Publications Online. 2001. DSTO-RR-0211 (<http://hdl.handle.net/1947/3375>).

- 22.Redding N. J. SAR Image Formation via Inversion of Radon Transforms // Proceedings of the International Conference on Image Processing. Singapore. 2004. P. 13-16.
- 23.*Bashforth F, Adams JC*. An attempt to test the theory of capillary action. Cambridge, 1892.
- 24.*Blaisdell BE*. The Physical Properties of Fluid Interfaces of Large Radius of Curvature, *J. Math Phys* 1940; 19:186.
- 25.*Tawde NR, Parvatikar KG*. Unstable pendant drops in relation to drop-weight method of surface tension. *Indian J Phys* 1958;32:174.
- 26.*Fordham S*. On the Calculation of Surface Tension from Measurements of Pendant Drops. *Proc R Soc Lond* 1948;194A:1.
- 27.*Mills OS*. Tables for use in the measurement of interfacial tensions between liquids with small density differences. *Br J Appl Phys* 1953;4:24.
28. *Paddy JF*. In: Matijevic E, editor. Surface Tension. Part II. The Measurement of Surface Tension, vol.1. New York: Wiley; 1968.
- 29.*Hartland S, Hartley RW*. Axisymmetric fluid–liquid interfaces. Amsterdam: Elsevier; 1976.
- 30.*Maze C., Burnet G*. A Non-linear Regression Method for Calculating the Surface Tension and Contact Angle from the Shape of a Sessile Drop // *Surf. Sci.* 1969. V. 13. P. 451.
- 31.*Huh C, Reed RL*. *J Colloid Interface Sci* vol. 91, 1983, p. 472.
- 32.*Boyce JF, Schürch S, Rotenberg Y, Neumann AW*. The measurement of surface and interfacial tension by the axisymmetric drop technique. *Colloids Surf.* Vol. 9, , 1984, p. 307.
- 33.The determination of interfacial tension by video image processing of pendant fluid drops / Anastasiadis SH, Chen JK, Koberstein JT, et al. *J Colloid Interface Sci*, vol. 119, p. 55, 1986.
- 34.*Hoggs RV*. An introduction to robust estimation. NewYork: Academic Press; 1979.

35. Rotenberg Y, Boruvka L, Neumann AW. Determination of surface tension and contact angle from the shapes of axisymmetric fluid interfaces. *J Colloid Interface Sci*, vol. 93, 1983, p. 169.
36. Automation of axisymmetric drop shape analysis for measurements of interfacial tensions and contact angles / Cheng P, Li D, Boruvka L, Rotenberg Y, Neumann AW. *Colloids Surf*. vol. 43, 1990, p. 151.
37. Cheng P, Neumann AW. Computational evaluation of axisymmetric drop shape analysis-profile (ADSA-P). *Colloids Surf* vol. 62, 1992, p. 297.
38. del Río OI, Neumann AW. Axisymmetric drop shape analysis: Computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops. *J Colloid Interface Sci*. vol. 196, 1997, p. 136.
39. Dormand, J.R., Prince, P.J., A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6 (1): 19–26 (1980).
40. Canny, J., A Computational Approach To Edge Detection // *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, 1986.
41. D.Y. Chan, W.C. Wang. Robust Edge-Based Object Segmentation by Likely Boundary Anchor Selecting and Adaptive-Thresholding Linking. Proc. of the 2010 Conference on Computer Vision, Image Processing and Information Technology, Ching Yun University, Zhongli, Jun. 9, 2010.
42. Devernay F. A non-maxima suppression method for edge detection with sub-pixel accuracy. Technical report RR 2724, INRIA (1995).
43. Eustathopoulos N, Nicholas M, Drevet B. Wettability at high temperature, Pergamon materials series: vol 3. Oxford, UK: Pergamon, 1999.
44. P.V.C. Hough. Method and means for recognizing complex patterns, U.S. patent 3069654. 1962.