Министерство образования и науки Российской Федерации

УДК
ГРНТИ
Инв. №

УТВЕРЖДЕНО:
Исполнитель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»**
От имени Руководителя организации   **______________ / С.Ю. Егоров /**   **М.П.**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ

о выполнении 5 этапа Государственного контракта
№ 16.740.11.0570 от 30 мая 2011 г. и Дополнению от 12 марта 2013 г. № 1

Исполнитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Программа (мероприятие): Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., в рамках реализации мероприятия № 1.3.1 Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук.
Проект: Свойства дискретных функций и операций над ними
Руководитель проекта: **______________/Федорова Валентина Сергеевна**   (подпись)

Москва
2013 г.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

по Государственному контракту 16.740.11.0570 от 30 мая 2011 на выполнение поисковых научно-исследовательских работ для государственных нужд

Организация-Исполнитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Руководитель темы:

кандидат физико-математических наук, без ученого звания	________________________ подпись, дата	Федорова В. С.

Исполнители темы:

кандидат физико-математических наук, без ученого звания	________________________ подпись, дата	Ларионов В. Б.

Реферат

Отчет 28 с., 1 ч., 2 рис., 0 табл., 10 источн., 1 прил.

Многозначная логика , дискретная функция , замкнутый класс , монотонность , частично упорядоченное множество , надструктура , предикат

В отчете представлены результаты исследований, выполненных по 5 этапу Государственного контракта № 16.740.11.0570 "Свойства дискретных функций и операций над ними" (шифр "2011-1.3.1-111-001") от 30 мая 2011 по направлению "Проведение научных исследований молодыми кандидатами наук в следующих областях:- математика; - механика" в рамках мероприятия 1.3.1 "Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук.", мероприятия 1.3 "Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук и целевыми аспирантами в научно-образовательных центрах" , направления 1 "Стимулирование закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий." федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы.

Цель работы - Получение результатов для построения классов, не являющихся предикатно-описуемыми, в надрешетке некоторых семейств классов монотонных функций многозначной логики.

Методы теории множеств, теории графов, теории функций многозначной логики, соответствие Галуа между решетками функций и предикатов.

Персональный компьютер; операционная система Microsoft Windows; пакет офисных программ Microsoft Office; текстовый редактор TeXnicCenter и пакет программ MikTeX.

1. Построение классов, не являющихся предикатно-описуемыми, в надрешетке некоторых семейств классов монотонных функций.
2. Статья, содержащая результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.
3. Научно-технический отчёт по пятому этапу.

Содержание

1. Введение

Теория дискретных управляющих систем занимает одно из важнейших мест в области знаний, исследования по которой в отечественной традиции относят к математической кибернетике, а в зарубежной – к theoretical computer science. Различные задачи, связанные с дискретными управляющими системами, играют важную роль как в теоретических исследованиях, так и при решении прикладных задач из разных областей знаний.

Исследования, проводимые в рамках работ по Государственному контракту, связаны с изучением неотъемлемой части теории дискретных управляющих систем – теории дискретных функций. В частности, проведенные в рамках пятого этапа работ по Государственному контракту исследования касались теории функциональных систем, а точнее, проблем выразимости, классификации элементов и описания замкнутых классов функций.

На пятом этапе Государственного контракта были выполнены работы по следующему направлению, касающемуся изучения строения фрагментов решетки замкнутых классов функций многозначной логики: оценка сложности надструктуры некоторых семейств классов монотонных функций. Исследовался вопрос о том, может ли надструктура некоторых семейств классов монотонных функций содержать большое число классов, не являющихся предикатно-описуемыми. Такие классы были построены для специальных семейств классов монотонных функций.

Кроме того, выполненные на пятом этапе работы включали также следующие действия:

1. Подготовка научной статьи к публикации: по результатам проведенных исследований опубликована статьи в высокорейтинговом российском журнале.

2. Подготовка настоящего научно-технического отчета.

Все перечисленные работы проводились в соответствии с составленным ранее планом проведения исследований, вошедшим в научно-технический отчет по итогам первого этапа. Подробное изложение результатов проведенных исследований содержится в основной части настоящего отчета.

2. Семейства классов монотонных функций многозначной логики

2.1. Оценка сложности надструктуры некоторых семейств классов монотонных функций

Одной из основных задач в теории функций многозначной логики является *проблема выразимости функций*: заданную k-значную функцию или класс функций требуется выразить, используя суперпозицию функций некоторого имеющегося множества. Указанную задачу, несколько уменьшив общность постановки, можно переформулировать в задачу описания всех *замкнутых относительно операции суперпозиции* классов функций k-значной логики, то есть таких классов, которые содержат любую функцию, представимую суперпозицией произвольных функций этого класса.

Яновым и Мучником в [1] было показано, что решетка замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций k-значной логики для любого $k \geq 3$ содержит континуальное число классов. В силу невозможности ее исчерпывающего описания представляется интересным изучение различных подмножеств этой решетки. В рамках третьего этапа данного Государственного контракта была описана структура всех классов, содержащих произвольный класс самодвойственных функций. В рамках четвертого этапа была описана надструктура класса однородных функций и доказан критерий наличия бесконечной надструктуры для классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченное множество специального вида. В рамках данного пятого этапа с использованием схожей техники исследуется вопрос о том, может ли надструктура некоторых семейств классов монотонных функций содержать большое число классов, не являющихся предикатно-описуемыми.

Принципиальная возможность существования замкнутых классов монотонных функций многозначной логики с бесконечной надструктурой (то есть множеством содержащих их классов) была доказана В. Б. Ларионовым в статье [2]. Как было показано в работе того же автора [3], минимальной логикой с такими классами функций является четырехзначная логика P_4. В [4] был получен критерий наличия бесконечной надструктуры классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченные множества с одним минимальным и двумя максимальными, двумя минимальными и одним максимальным, двумя минимальными и двумя максимальными элементами. В рамках пятого этапа продолжено изучение надструктуры некоторых из перечисленных классов монотонных функций и показано, что она может содержать бесконечное число классов, не являющихся предикатно-описуемыми.

В качестве основного инструмента исследований по данной тематике был выбран предикатный подход, но также широко применялись теория Галуа, аппарат теории графов и элементы теории частичного порядка.

Введем необходимые определения и обозначения. Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение 1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функцией *k*-значной логики $(k \geq 2)$, если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k.

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Множество всех функций *k*-значной логики обозначим P_k. Для любого подмножества *A* из P_k через [*A*] будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции (для функций далее везде будет идти речь именно об этом типе замыкания).

Пусть на E_k задано некоторое отношение частичного порядка *r*. Возьмем два произвольных набора $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ из E_k^n. Будем говорить, что $\tilde{a}$ не превосходит $\tilde{b}$ относительно частичного порядка *r* и записывать $\tilde{a} \leq_r \tilde{b}$, если для любого $1 \leq i \leq n$ справедливо неравенство $a_i \leq_r b_i$.

Определение 2. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной относительно частичного порядка *r*, если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ таких, что $\tilde{a} \leq_r \tilde{b}$, выполнено $f(\tilde{a}) \leq_r f(\tilde{b})$. Множество всех функций из P_k, монотонных относительно *r*, называется классом монотонных функций M_r.

Для наглядности везде далее будем задавать частичный порядок *r* частично упорядоченным множеством (ЧУМ) *H* из элементов E_k и соответствующий класс обозначать M_H.

Определение 3. Пусть $p(x_1, \ldots, x_m)$ – некоторый предикат, определенный на E_k^m, $f(y_1, \ldots, y_n)$ – функция из P_k. Говорят, что функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ сохраняет предикат $p(x_1, \ldots, x_m)$, если для любых *n* наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющих предикату p, набор $(f(a_{11},\dots,a_{n1}),\dots,f(a_{1m},\dots,a_{nm}))$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

Будем обозначать через $Pol(p)$ множество всех функций, сохраняющих предикат p. Класс M_H является замкнутым классом функций, сохраняющих предикат $R(x, y) = TRUE \Leftrightarrow x \le_r y$ [5]. Везде далее в выражении «монотонный класс задается предикатом R» подразумевается именно описанный предикат $R(x, y)$.

Одним из семейств предполных классов функций k-значной логики при $k \ge 3$ (везде далее рассматриваются только такие k) является некоторое подмножество всех классов монотонных функций [6]. Класс M_H является предполным тогда и только тогда, когда ЧУМ H обладает в точности одним максимальным и одним минимальным элементом [7].

На множестве предикатов вводятся следующие операции: отождествление переменных, конъюнкция и добавление квантора существования по какой-либо переменной (проекция). Для произвольного множества предикатов P через $[P]$ будем обозначать его замыкание относительно указанных операций. Подробное определение этих операций можно найти в [8] и [9].

Лемма 1 ([8]). Если $p_1 \in [p_2]$, то $Pol(p_2) \subseteq Pol(p_1)$.

Лемма 2 ([5]). Для произвольного предиката p из представления $p = p_1 \,\&\, p_2 \,\&\dots\&\, p_t$, где предикаты $p_1,\dots,p_t$ не имеют общих переменных и не являются тождественно ложными, следует

$$Pol\,p = Pol\,p_1 \cap Pol\,p_2 \cap \dots \cap Pol\,p_t.$$

Пусть предикат p задается формулой F над системой $\{R\}$, где R – предикат, задающий класс монотонных функций. Везде далее рассматриваются только формулы с вынесенными вперед кванторами существования. Сопоставим F ориентированный граф G_F по следующему правилу: между множеством вершин G_F и множеством переменных F (учитываем и свободные, и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x, пометим символом «x», если переменная x свободная, и «$\exists x$», если связанная. Данную вершину обозначим v_x. В графе G_F есть ориентированное ребро (v_x, v_y) тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R(y, x)$.

Далее нам потребуются некоторые свойства предикатов, доказательства которых содержатся в [4]. Обозначим через $\overline{F}$ множество формул над $\{R\}$, графы которых не имеют ориентированных циклов.

Лемма 3 ([4]). Пусть R – предикат, задающий класс монотонных функций, $p_1, p_2 \in [R]$, $Pol\, p_1 \subseteq Pol\, p_2$ предикат p_2 реализуется над $\{R\}$ формулой из $\overline{F}$. Тогда $p_2 \in [\,p_1]$.

Лемма 4 ([4]). Пусть R – предикат, задающий класс монотонных функций; $P_1, P_2 \subseteq [R]$ – некоторые множества предикатов, такие что $Pol\, P_1 = Pol\, P_2$. Тогда для любого предиката $p \in P_1$, задаваемого над системой $\{R\}$ формулой из множества $\overline{F}$, справедливо $p \in [P_2]$.

Определение 4. Предикат $p(x_1,\ldots,x_n)$, где $n \geq 2$, назовем невырожденным, если существует набор $\tilde{a} \in E_k^n$ такой, что $p(\tilde{a}) = FALSE$, но для любого номера $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует элемент $b_i \in E_k$ такой, что $p(a_1,\ldots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\ldots,a_n) = TRUE$. Одноместный предикат невырожден тогда и только тогда, когда он отличен от тождественно истинного и ложного предикатов. В противном случае назовем предикат вырожденным.

Лемма 5 ([4]). Любой класс $A = Pol\, p$, где $p \in [R]$, $A \neq Pol\, R$, $A \neq P_k$, представим конечным пересечением $A = \bigcap_i Pol\, p_i$, где все p_i – невырожденные предикаты.

Лемма 6 ([4]). Пусть ЧУМ H имеет единственный минимальный элемент, R – предикат, задающий класс монотонных функций M_H. Пусть $p_1(x_1,\ldots,x_{n_1}),\ldots,p_l(x_1,\ldots,x_{n_l}) \in [R]$ – невырожденные предикаты местностей соответственно $n_1,\ldots,n_l$, задаваемые формулами из $\overline{F}$, $n = \max(n_1,\ldots,n_l)$, $Pol\, p_i \neq Pol\, R$. Тогда любой невырожденный предикат p' из множества $[\,p_1,\ldots,p_l]$ имеет местность $r \leq n$.

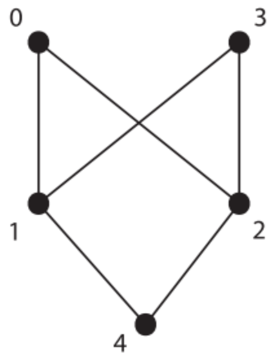

Рис. 1. Частично упорядоченное множество H_5.

Пусть H_5 – ЧУМ из пяти элементов, изображенное на рисунке 1.

Теорема 1 ([2, 4]). В P_5 в решетке замкнутых классов над классом монотонных функций M_{H_5} находится бесконечная цепочка замкнутых классов.

H_5 является минимальным ЧУМ, имеющим один минимальный и два максимальных элемента, таким, что надструктура класса M_{H_5} бесконечна. Далее мы покажем, что в этом самом простом случае надструктура M_{H_5} весьма сложна.

Определение 5. Замкнутый класс A называется предикатно-описуемым, если существует предикат *p* такой, что справедливо представление $A = Pol\ p$.

Если класс *A* не является предикатно-описуемым, это свидетельствует о сложности его надструктуры [10]: либо существует бесконечная цепочка классов, содержащих *A*, с пределом, равным *A*, либо бесконечное число минимальных надклассов *A*.

Теорема 2. В P_5 в решетке замкнутых классов над классом монотонных функций M_{H_5} находится бесконечное число классов, не являющихся предикатно-описуемыми.

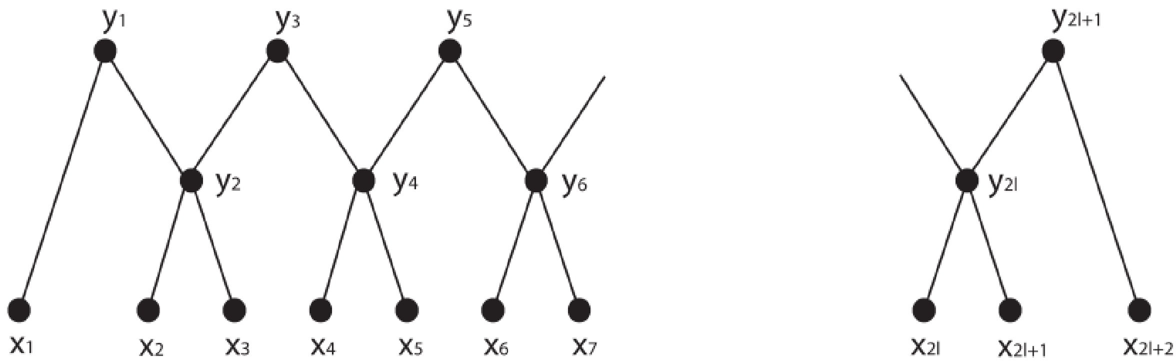

Рис.2. Граф формулы F_l, задающей предикат p_l.

Доказательство. Пусть R_5 – предикат, задающий класс монотонных функций M_{H_5}. Определим (2*l*+2)-местный предикат p_l $(l \geq 1)$, задаваемый формулой над $\{R_5\}$, граф которой изображен на рисунке 2. Для упрощения каждый элемент графа помечен символом соответствующей переменной, опущены кванторы существования и стрелки (предполагается, что идут сверху вниз). Все переменные x_i (находящиеся на нижнем уровне) являются свободными, а y_i – связанными. Указанную формулу обозначим через F_l, а соответствующий граф – G_{F_l}. Отметим, что именно классы $Pol\, p_l$ образуют бесконечную цепочку из теоремы 1.

Рассмотрим произвольный набор $\tilde{a} \in E_5^{2h+2}$, где $h \geq 1$. Разрежем его на h+2 куска: первая компонента $\{a_1\}$, h кусков $\{a_{2(s+1)},\ a_{1+2(s+1)}\}$ размера 2, где $s \in \{0, \ldots, h-1\}$, последняя компонента $\{a_{2h+2}\}$. Составим множество T_h из таких наборов $\tilde{a}$, для которых выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) в одном куске набора $\tilde{a}$ содержатся оба элемента 0 и 3;

2) два соседних куска набора $\tilde{a}$ содержат оба элемента 0 и 3;

3) между двумя кусками набора $\tilde{a}$, один из которых содержит элемент 0, а другой – элемент 3, находятся только куски, в каждом из которых содержатся оба элемента 1 и 2, то есть все такие куски имеют вид $\{1,2\}$ или $\{2,1\}$.

Лемма 7 ([4]). Для произвольного набора $\tilde{b} \in E_5^{2h+2}$, $h \geq 1$, выполнено $p_h(\tilde{b}) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $\tilde{b} \notin T_h$.

Для предиката p_l обозначим через X_1 множество переменных $x_2, x_4, \ldots, x_{2l}$, а через X_2 – множество переменных $x_3, x_5, \ldots, x_{2l+1}$ (то есть из каждой пары переменных $\{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{2l}, x_{2l+1}\}$, мы поместили одну переменную в множество X_1, а другую – в множество X_2). Обозначим через P_{eq} множество предикатов, которые можно получить из p_l произвольными независимыми отождествлениями (возможно, пустыми) переменных внутри множеств X_1 и X_2. Для произвольного $p \in P_{eq}$ пусть $X_i(p)$, $i = 1, 2$, – множество переменных предиката p, которые получились в результате описанного отождествления из переменных множества X_i предиката p_l. Через $s_i(p)$ обозначим мощность множества $X_i(p)$.

Лемма 8. Любой предикат $p \in P_{eq}$ является невырожденным.

Доказательство. Предикат p получен из некоторого p_l отождествлением переменных внутри множеств X_1 и X_2. Отметим, что сам предикат p_l является невырожденным, поскольку с учетом леммы 7 достаточно в определении 4 рассмотреть набор $\tilde{a} = (0, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, 3)$. Получим из $\tilde{a}$ новый набор $\tilde{b}$, отождествив компоненты с номерами, соответствующими номерам отождествляемых переменных при получении предиката p. Это всегда можно сделать, поскольку на $\tilde{a}$ все переменные из множества

X_i, $i=1,2$, приняли равные значения. Применением определения 4 к предикату p и набору $\tilde{b}$ получаем, что p – невырожденный предикат.

Рассмотрим множества предикатов

$$P_m = \{ p \in P_{eq} : \min(s_1(p), s_2(p)) \le m \},$$

где $m \ge 1$. Обозначим через C_m классы функций $Pol\, P_m$.

Лемма 9. Все замкнутые классы функций C_m, $m \ge 1$, не являются предикатно-описуемыми.

Доказательство. Предположим, что некоторый класс C_m предикатно-описуем, и $C_m = Pol\, p$ для некоторого предиката p. По лемме 5 класс C_m представим конечным пересечением классов $Pol\, t_i$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, где предикаты t_i являются невырожденными. Обозначим через t предикат, равный $t_1 \,\&\ldots\&\, t_s$, где конъюнкции осуществляются без отождествления переменных. По лемме 2 получаем $C_m = Pol\, t$.

С другой стороны, $C_m = Pol\, P_m$. Возьмем произвольный предикат $p' \in P_m$. Справедливо $C_m \subseteq Pol\, p'$, то есть $Pol\, t \subseteq Pol\, p'$. Заметим, что $F_l \in \overline{F}$. По лемме 3 выполняется $p' \in [t]$. Поскольку предикат t выражается конъюнкцией над системой $\{t_1, \ldots, t_s\}$, то $p' \in [\{t_1, \ldots, t_s\}]$. Обозначим через N максимальную местность невырожденных предикатов $t_1, \ldots, t_s$. Согласно лемме 6 мы не можем реализовать невырожденный предикат p' местности больше, чем N, формулой над $\{t\}$. Но поскольку местность невырожденных предикатов $p' \in P_m$ (см. лемму 8) не ограничена сверху, получаем противоречие.

Лемма 10. Все классы C_m различны.

Доказательство. Предположим, что $C_{m_1} = C_{m_2}$ для некоторых $m_1 > m_2 \ge 1$. Напомним, что $C_{m_1} = Pol\, P_{m_1}$, $C_{m_2} = Pol\, P_{m_2}$. По определению множества предикатов P_m справедливо $P_{m_1}, P_{m_2} \subseteq [R_5]$. Поскольку для произвольного $p_{m_1} \in P_{m_1}$ выполняется $F_{p_{m_1}} \in \overline{F}$, то по лемме 4 получаем, что $p_{m_1} \in [P_{m_2}]$. Поскольку формула, реализующая предикат p_{m_1} над P_{m_2}, не может быть бесконечной, то существуют предикаты $t_1, \ldots, t_m \in P_{m_2}$ такие, что $p_{m_1} \in [\{t_1, \ldots, t_m\}] = Q$.

Рассмотрим формулу, реализующую p_{m_1} над Q:

$$p_{m_1}(\tilde{x}) = \exists y_1, \ldots, y_s \; P_1 \,\&\ldots\&\, P_r , \qquad (1)$$

где P_i, $i = 1, \ldots, r$, – некоторый предикат из множества Q. Каждый P_i зависит от переменных $x_1, \ldots, x_{2m_1+2}, y_1, \ldots, y_s$. В работе [4] было показано, что в случае, когда H имеет единственный минимальный элемент, формулу вида (1) можно преобразовать так, чтобы каждая связанная переменная y_i встречалась только в одном сомножителе P_j. То есть

$$p_{m_1}(\tilde{x}) = P_1' \,\&\ldots\&\, P_r' ,$$

где P_j' получен из P_j, $j = 1, \ldots, r$, некоторой проекцией. В этой формуле для каждого j в P_j' были внесены связанные переменные из множества $\{ y_1, \ldots, y_s \}$, от которых зависит P_j.

Рассмотрим набор $\tilde{a} = (0, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, 3) \in E_5^{2m_1+2}$. По лемме 7 справедливо $p_{m_1}(\tilde{a}) = FALSE$, поэтому среди предикатов $P_1', \ldots, P_r'$ найдется предикат, ложный на $\tilde{a}$. Пусть это P_i' (переобозначим его для удобства через p). Предикат p получен некоторыми проекциями и отождествлениями переменных из предиката $t_q \in P_{m_2}$, который, в свою очередь, получен из некоторого p_l отождествлением переменных внутри множеств X_1 и X_2, при этом $\min(s_1(t_q), s_2(t_q)) \le m_2$. Таким образом, p получен из p_l некоторыми отождествлениями и проекциями. Для произвольной переменной x_i предиката p_{m_1} обозначим через $U(x_i)$ множество переменных предиката p_l, которые при получении p были отождествлены в x_i (оба предиката p_{m_1} и p зависят от набора переменных $\tilde{x}$).

Обозначим

$$U = \bigcup_{i=1}^{2m_1+2} U(x_i) .$$

По переменным предиката p_l, которые не попали в U, была взята проекция.

Поскольку при рассмотрении набора $\tilde{a}$ получаем, что предикат p_{m_1} невырожден, то любая проекция p_{m_1} по одной переменной истинна на соответствующем наборе $\tilde{a}'$ (набор $\tilde{a}$ без той компоненты, по которой берется проекция). Те же самые рассуждения справедливы и для p, откуда следует, что предикат p также невырожден. Следовательно, все переменные p существенны, и все множества $U(x_i)$ непустые.

Для произвольного набора $\tilde{c} \in E_5^{2m_1+2}$ обозначим через $\Phi(\tilde{c})$ множество тех наборов из $E_5^{2m_1+2}$, у которых все компоненты из $U(x_i)$ равны c_i, а остальные принимают произвольные значения.

Рассмотрим множество $\Phi(\tilde{a})$. По построению для любого $\tilde{d} \in \Phi(\tilde{a})$ справедливо $p_l(\tilde{d}) = FALSE$. Все такие наборы $\tilde{d}$ имеют общую компоненту из номеров, соответствующих множеству *U*, и предикат *p* ложен на таких наборах независимо от того, какие значения приняли переменные, не принадлежащие множеству *U*. По лемме 7 получаем, что указанная общая компонента имеет вид $C = [0, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, 3]$. Итак, в указанном куске *C* все переменные принадлежат множеству *U*. Пусть найдется переменная x_i такая, что ни один элемент множества $U(x_i)$ не входит в кусок *U*. Но тогда проекция предиката *p* по переменной x_i, а значит и p_{m_1}, ложна на наборе $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{2m_1+2})$. Получаем противоречие. Итак, в куске *C* содержится по крайней мере по одному элементу из каждого $U(x_i)$. Отметим также, что первая (последняя) переменная куска *C* принадлежит множеству $U(x_1)$ (соответственно $U(x_{2m_1+2})$), поскольку в наборе $\tilde{a}$ только x_1 (x_{2m_1+2}) принимает значение 0 (соответственно 3).

Рассмотрим $2m_1 + 2$-компонентный набор $\tilde{b}^i = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 1, 3, 3, \ldots, 3)$, где (1,1) стоит в *i*-м куске (то есть 2*i* и (2*i*+1)-я компоненты набора $\tilde{b}^i$ равны 1). По лемме 7 справедливо $p_{m_1}(\tilde{b}^i) = TRUE$, откуда $p(\tilde{b}^i) = TRUE$. Следовательно, должен существовать набор $\tilde{c}^i \in \Phi(\tilde{b}^i)$ такой, что $p_l(\tilde{c}^i) = TRUE$. Рассмотрим кусок *C* на наборе $\tilde{c}^i$. Первая и последняя его компоненты опять будут равны 0 и 3 соответственно. По лемме 7 между ними должна встретиться пара (1,1), то есть $C = [0, \ldots, 1, 1, \ldots, 3]$. Это означает, что переменные из указанной пары входят в множество $U(x_{2i}) \cup U(x_{2i+1})$. Но в одно множество эти переменные входить не могут, поскольку на наборах $\Phi(\tilde{a})$ они принимали разные значения.

Итак, получаем, что для любой пары компонент $(x_{2i},\, x_{2i+1})$ из $\tilde{x} \in E_5^{2m_1+2}$ для p_{m_1} должны найтись такие элементы в множествах $U(x_{2i})$, $U(x_{2i+1})$, которые попадут в одну пару в наборе $\tilde{y} \in E_5^{2m_1+2}$ для p_l. Таким образом, каждая пара из $\tilde{x} \in E_5^{2m_1+2}$ для p_{m_1} требует одной переменной из $X_1(t_q)$ и одной из $X_2(t_q)$, то есть число пар не может быть больше, чем $\min(s_1(t_q), s_2(t_q)) \le m_2$. Но нам требуется $m_1 > m_2$ пар. Полученное противоречие показывает, что классы C_{m_1} и C_{m_2} различны.

Итак, мы построили требуемое множество классов C_m, где $m > 1$. Теорема доказана.

Таким образом, доказанная теорема говорит о том, что надструктура класса M_{H_5} является весьма сложной. Это делает очень трудной задачу ее полного описания и невозможным ее изображение в виде ЧУМ.

В работе [4] доказан критерий наличия бесконечной надструктуры у классов монотонных функций, сохраняющих ЧУМ *T* с единственным минимальным и двумя максимальными элементами: по сути, это наличие в *T* подмножества H_5. Теорема 2 остается справедливой для всех таких классов M_T с бесконечной надструктурой, при этом ее доказательство не меняется. С учетом изученных в [4] конечных надструктур классов M_T, получаем следующий основной результат:

Теорема 3. Если ЧУМ *T* имеет один минимальный элемент и два максимальных, то либо класс M_T является предпредполным, либо существует бесконечное число различных классов, не являющихся предикатно-описуемыми и содержащих M_T.

Поскольку класс монотонных функций не меняется при инвертировании порождающего его ЧУМ [7], то все доказанные результаты справедливы и для случая, когда ЧУМ имеет два минимальных элемента и единственный максимальный.

Отметим, что открытым остается вопрос о мощности бесконечной надструктуры классов M_T для описанных видов ЧУМ *T*.

2.2. Публикации результатов НИР

По результатам проведенных исследований опубликована статья в высокорейтинговом российском журнале:

- *В.Б. Ларионов, В.С. Федорова* «О сложности надструктуры классов монотонных *k*-значных функций специального вида» // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2012. Т. 5, № 1, с. 70-79.

Копия статьи включена в Приложение А к настоящему отчету.

3. Заключение

В рамках пятого этапа работ по Государственному контракту проведены следующие исследования в соответствии с планом:

1. Построены классы, не являющиеся предикатно-описуемыми, в надрешетке некоторых семейств классов монотонных функций.

2. По результатам исследований опубликована статья в высокорейтинговом российском журнале.

3. Подготовлен научно-технический отчет по итогам пятого этапа.

План проведения исследований пятого этапа выполнен полностью. Копия статьи приводится в Приложении А. Все полученные научные результаты являются новыми. Материалы, описывающие проведение исследований, включают все необходимые сведения для обеспечения возможности воспроизведения результатов.

4. Список использованных источников

1. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

2. Ларионов В. Б. О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 5. С. 111–116.

3. Ларионов В. Б. О монотонных замкнутых классах функций многозначной логики с бесконечной надструктурой // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям, 18–23 мая 2009 г. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2009. С. 7–12.

4. Ларионов В. Б. Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций // Диссертация на соискание степени к. ф.-м. н., 2009. 157 с.

5. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. М.: Изд. дом МЭИ, 1997. 144 с.

6. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1965. Volume 260. P. 3817–3819.

7. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики, вып. 3. М.: Наука, 1960. С. 49–61.

8. Бондарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1- 10. № 5. С. 1- 9.

9. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. – М.: Физматлит, 2000. – 128 с.

10. Яблонский С. В. О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Доклады АН СССР. 1974. Т. 218, № 2. С. 304–307.